

Les calculatrices sont interdites. Durée 2h.

Exercice 1

Soit $g : t \mapsto \frac{\cos t - 1}{t^2}$.

1. Quel est l'ensemble D de définition de g ?
2. Donner un équivalent de g en 0 et en déduire une éventuelle limite.
3. La fonction g est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Exercice 2

Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$, et

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2 + \alpha)(t^2 + \beta)}}.$$

Justifier que l'intégrale *impropre* $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ est convergente.

N.B. : on demande de détailler tous les raisonnements et de mentionner avec précision d'éventuels résultats de cours utilisés.

Exercice 3

Soit a un réel positif ou nul. On considère les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = a, \quad b_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ on a
 - a. $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$,
 - b. $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \right)^2$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$$

3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \right)^2 \leq a_n - b_n$$

puis que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n} |1 - a|$$

4. En déduire que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

→ T.S.V.P.

Problème 1

Notations : n désigne un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} , de degré inférieur ou égal à n .

On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application

$$f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto X(P(X) - P(X-1))$$

1. (a) Calculer $f(1)$, $f(X)$, $f(X^2)$.
(b) Si $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$, quel est le terme de plus haut degré du polynôme $P(X-1)$?
(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(X) = P(X-1)$. On pose $Q = P - P(0)$. Montrer que Q est un polynôme constant que l'on précisera.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau de f , en déduire la dimension de l'image de f .
4. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$.
 - (a) Quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Ecrire la matrice de l'endomorphisme f dans cette base canonique.
 - (b) f est-elle inversible?
5. Pour tout entier naturel k , on définit les polynômes P_k par :
 $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et $\forall k \geq 2$, $P_k = X(1-X)(2-X)\dots(k-1-X)$.
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - (b) Pour tout entier naturel k , montrer qu'il existe un nombre réel c_k tel que $f(P_k) = c_k P_k$.
6. En déduire la matrice M de f dans la base \mathcal{F} .
7. Déterminer tous les polynômes vérifiant $f(P) = P$.
8. On suppose dans toute la suite que $n \geq 3$.
 - (a) Le polynôme $R = 4X - 2X^2 + X^3$ admet-il un antécédent par f ? Si oui, est-il unique?
 - (b) Même question pour le polynôme $S = 1 + X + X^2$.
9. Montrer qu'il existe une application linéaire σ vérifiant :
 $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\sigma(P_k) = P_{k+1}$, et $\sigma(P_n) = P_0$.
Est-elle unique?
10. On pose $D_0 = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_k = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(P_k)$.
Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer $\sigma^\ell(D_k)$.
11. Que dire de σ^{n+1} ?
12. Déterminer un polynôme T annulateur de σ .
(pour les 3/2 : un polynôme $T \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $T(\sigma) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])}$)
13. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}_{\mathbb{R}}\{(\sigma^i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ inclus dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
14. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$?