

**Définition 1** Si  $I = [a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , on appelle longueur de l'arc paramétré  $\Gamma = F(I)$  le nombre, noté  $L(\Gamma)$  défini par :

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|F'(u)\|_2 \, du.$$

**Définition 2** Un paramétrage  $G : J \rightarrow E$ ,  $u \mapsto G(u)$  d'un arc  $\Gamma$  est dit paramétrage normal de  $\Gamma$  si :

$\forall u \in J, \|G'(u)\|_2 = 1$ . (on dit aussi paramétrage unitaire)

**Proposition 1** Soit  $t_0 \in I$  fixé. L'application  $s : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{t_0}^t \|F'(u)\|_2 \, du$

est une abscisse curviligne (i.e.  $\forall t \in I, s'(t) = \|F'(t)\|_2$ ) de l'arc paramétré  $\Gamma = F(I)$ .

**Définition 3** On appelle courbure de l'arc  $\Gamma$  paramétré normalement au point  $M_\sigma$  le nombre, noté  $c(\sigma)$  défini par :

$$c(\sigma) = \varphi'(\sigma) = \frac{d(\vec{i}, \vec{T}(\sigma))}{d\sigma}(\sigma)$$

**Théorème 2** (Formules de Frenet)

Soit  $\Gamma$  un arc birégulier de classe  $C^2$  paramétré normalement par  $G : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma \mapsto G(\sigma)$ ,  $\vec{T}$  vecteur tangent unitaire,  $\vec{N}$  vecteur normal unitaire,  $\varphi(\cdot) = (\vec{i}, \vec{T}(\cdot))$ ,  $c$  la courbure.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{T}}{d\sigma}(\sigma) = c(\sigma)\vec{N}(\sigma) \\ \frac{d\vec{N}}{d\sigma}(\sigma) = -c(\sigma)\vec{T}(\sigma) \end{cases}$$

**Proposition 3** (aire d'une partie compacte paramétrée en cartésiennes)

Soit  $\mathcal{K}$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$  délimitée par un contour fermé  $\Gamma$  orienté positivement, paramétré par

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Alors l'aire de  $\mathcal{K}$  vaut :  $\iint_{\mathcal{K}} 1 \, dx \, dy = \int_I x(t)y'(t)dt = \int_I -y(t)x'(t)dt = \frac{1}{2} \int_I [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] \, dt$

**Théorème 4** (formule de Green-Riemann).

Soient  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$  délimitée par un contour fermé  $\Gamma$  lui-même paramétré par une application  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , avec  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

Soient  $V \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$  admettant des dérivées partielles secondes, et

$dV : (x, y) \mapsto (h_1, h_2) \mapsto P(x, y)h_1 + Q(x, y)h_2$  sa différentielle, avec  $P = \frac{\partial V}{\partial x}$  et  $Q = \frac{\partial V}{\partial y}$  de classe  $C^1$ .

Alors

$$\iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_{\Gamma} (P \, dx + Q \, dy) = \int_a^b \overrightarrow{\text{Grad}} V(F(t)) \cdot \vec{F}'(t) dt$$

(circulation du champ de vecteurs  $V$  le long de  $\Gamma$ , également notée  $\oint_{\Gamma} dV$  par les physiciens)