

Proposition 1 intégrales de Riemann

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt \text{ converge} \iff \beta < 1$$

Proposition 2 intégrales de Bertrand [HP]

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

Proposition 3 (CS d'intégrabilité sur $[0, +\infty[$) : Supposons

- i) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** (ou continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$;
- ii) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, avec $\alpha > 1$;
- iii) $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$, avec $\beta < 1$;

Alors f est **intégrable** sur \mathbb{R}^+ .

(l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, ainsi que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$)

Proposition 4 (CS d'intégrabilité sur $[0, +\infty[$) : Supposons

- i) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** (ou continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$;
- ii) $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$ (limite finie).
- iii) $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, avec $\alpha > 1$;

Alors f est **intégrable** sur \mathbb{R}^+ .

Cadre : $a, b \in \mathbb{R}, a < b, c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < c$.

Proposition 5 $\int_a^c f(t) dt$ absolument convergente $\iff \int_a^c |f(t)| dt < +\infty \iff \int_a^c \dots dt$ convergente

Proposition 6 f intégrable sur $[a, c[\iff \int_a^c f(t) dt < +\infty \iff \int_a^c |f(t)| dt < +\infty$

Définition 1 On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** sur le segment $I = [a, b]$ s'il existe un entier m et une **subdivision** $x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b$ de I , tels que, en notant pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ $I_i =]x_i, x_{i+1}[$ on ait : $\forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket f|_{I_i}$ admet un prolongement par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

(i.e. $\forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, f|_{I_i} : I_i \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I_i ; $\forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \exists \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$; $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \exists \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$).

Notation 1 On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 2 On dit que $f :]a, c[\rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** sur l'intervalle $J =]a, c[$ si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans J .

Proposition 7 f continue sur $[a, c[\iff f$ continue par morceaux sur $[a, c[$

Exemple 1 la fonction $x \mapsto E(x)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} mais n'est pas dérivable sur \mathbb{R} .