Définition 1 $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

Définition 2 *Pour* $\mathcal{A} = \{(x,y);\ a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$, $\displaystyle\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

Théorème 1 *(Fubini) :*
Pour $\mathcal{A} = \{(x,y);\ a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\} = \{(x,y);\ c \leq y \leq d, u(y) \leq y \leq v(y)\}$ *et pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A},\mathbb{R})$ *on a :*

$$\boxed{\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y}$$

Définition 3 $\displaystyle\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

Définition 4 *Pour* $\mathcal{D} = \{(x,y,z);\ a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x), \sigma(x,y) \leq z \leq \tau(x,y)\}$,
$\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \left(\int_{\sigma(x,y)}^{\tau(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

Théorème 2 *(Fubini) :*
Pour $\mathcal{D}$ *partie bornée de* $\mathbb{R}^3$ *et pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D},\mathbb{R})$, $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ *peut être calculée à l'aide de trois intégrales simples, et le résultat ne dépênd pas de l'ordre d'intégration choisi.*

Théorème 3 *(cdv polaire) :*
Pour $\mathcal{A} = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta);\ \rho \in [\rho_1,\rho_2], \theta \in [\theta_1,\theta_2]\}$ *partie bornée de* $\mathbb{R}^2$ *et pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A},\mathbb{R})$,

$$\boxed{\iint_{\mathcal{A}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{[\rho_1,\rho_2]\times[\theta_1,\theta_2]} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta.}$$

Théorème 4 *(cdv cylindrique) :*
Pour $\mathcal{D} = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z);\ \rho \in [\rho_1,\rho_2], \theta \in [\theta_1,\theta_2], z \in [z_0,z_1]\}$ *partie bornée de* $\mathbb{R}^3$ *et pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D},\mathbb{R})$*, on a :*

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_{[\rho_1,\rho_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times[z_1,z_2]} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z.}$$

Théorème 5 *(cdv sphérique) :*
Pour $\mathcal{D} = \{(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi);\ \rho \in [\rho_1,\rho_2], \theta \in [\theta_1,\theta_2], \varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]\}$ *partie bornée de* $\mathbb{R}^3$ *et pour toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{D},\mathbb{R})$*, on a :*

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_{[\rho_1,\rho_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]} f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\rho\ \mathrm{d}\rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi.}$$

Théorème 6 *(cdv intégrale triple) :*
Pour $\psi : \mathcal{D} \longrightarrow \Delta$ *un* $\mathcal{C}^1-$ *difféomorphisme de* $\mathcal{D}$ *vers* Δ*, et* $f : \Delta \to \mathbb{R}$ *continue, on a :*

$$\boxed{\iiint_{\Delta} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iiint_{\mathcal{D}} f(\psi(u,v,w))|\det(Jac\psi_{(u,v,w)})|\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w.}$$

Proposition 7 *(calcul de l'aire d'une surface plane) :*

Pour S *une partie bornée du plan, l'aire de* S *vaut :* $\boxed{\mathcal{A}(S) = \displaystyle\iint_S \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}$

Proposition 8 *(calcul du volume) :*

Pour $\mathcal{D}$ *une partie bornée de l'espace, le volume de* $\mathcal{D}$ *vaut :* $\boxed{\mathcal{V}(\mathcal{D}) = \displaystyle\iiint_S \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z}$

Proposition 9 *(calcul de l'aire d'une surface paramétrée) :*
Pour P *une partie du plan, et* $F : P \to \mathbb{R}$ *une paramétrisation de la surface* $\mathcal{S} = \{(x,y,z);\ (x,y) \in P,\ z = F(x,y)\}$*, l'aire de* $\mathcal{S}$ *vaut :*

$$\boxed{\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{P}} \|\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}$$
