

Définition 1 $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\iff \exists \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n < +\infty$

Notation 1 On note $\sum_{n \geq 0} u_n$ la série (convergente ou non) de terme général u_n . Lorsque la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la somme de cette série, c.à.d. la limite de la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1 séries géométriques

$\sum_{n \geq 0} a^n$ converge $\iff |a| < 1$, auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Proposition 2 séries de Riemann

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

Proposition 3 séries exponentielles

$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge, pour tout $z \in \mathbb{C}$, et sa somme, notée $\exp(z)$ vaut e^z .

Proposition 4 séries de Bertrand [HP]

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge $\iff \alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Proposition 5 (Comparaison série intégrale) :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors

La série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge $\iff f$ est intégrable sur $[n_0, +\infty[$

(c.à.d. la série et l'intégrale ont même nature : elles sont simultanément convergentes ou divergentes)

idée : on montre que la série de terme général $w_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n+1)$ est sommable.

Proposition 6 (Critère spécial des séries alternées) : Supposons

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée (i.e. $(-1)^n u_n$ a un signe constant);
- la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$;

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. En outre la suite (R_N) des restes est du signe de u_0 ,

et $\forall N \in \mathbb{N}$, $|R_N| \leq |u_{N+1}|$, où $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$

Exemple 1 Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ sont convergentes.

Exemple 2 Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln n}$, $\sum_{n \geq 0} 2^n$ sont divergentes.

Exemple 3 La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est convergente, mais non absolument convergente.

Proposition 7 (Comparaison de séries positives) :

- si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ CV
- si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum u_n$ DV, alors $\sum v_n$ DV

Proposition 8 (Absolue convergence par comparaison à une série positive) :

Si $u_n = O(v_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n$, et $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ ACV donc $\sum u_n$ CV

Remarque 1 On a : $u_n = O(v_n) \iff u_n = o(v_n)$