

Equations aux dérivées partielles

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x - y \quad (E)$$

Exercice 2

Posons

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (2)$$

1. Résoudre (1).
2. Résoudre (2).
3. Déterminer toutes les fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 vérifiant (1) et (2).

II. Exercices

Exercice 3

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$, on cherche les fonctions f de classe C^1 de A vers \mathbb{R} telles que pour tout (x, y) de A ,

l'équation aux dérivées partielles suivante soit vérifiée :

$$(E) : x \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, \cdot) + y \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \cdot) = 0.$$

- a) Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifier que $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = g(y/x)$ est solution de (E) ;
- b) Démontrer que si f vérifie (E) alors $f(u, uv)$ ne dépend que de v ;
- c) conclure.

Exercice 4 CCP 2010 oral

1. Représenter $Q =]0, +\infty[$ et $Q' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; |v| < u\}$.
2. Montrer que φ définie sur Q par : $\forall (x, y) \in Q, \varphi(x, y) = (y^2 + x^2, y^2 - x^2)$ est une bijection de Q dans Q' . Trouver φ^{-1} .
3. Montrer que φ est un C^1 -difféomorphisme de Q dans Q' .
4. Soit f de classe C^1 de Q dans \mathbb{R} , vérifiant :

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy \quad (1)$$

Quelle équation aux dérivées partielles (E) doit vérifier \tilde{f} , telle que $\tilde{f} \circ \varphi = f$, pour que f soit solution de (1) ?

5. Résoudre (E) et en déduire f .

III. Pour aller plus loin

Exercice 5

(Equation de la chaleur)

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(C) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

d'inconnue $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 avec les

conditions initiales :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & f(0, t) = f(1, t) = 0 & \text{(bord)} \\ \forall x \in [0, 1] & f(x, 0) = \theta(x) & \text{(température initiale)} \end{cases}$$

1) Dans le cas d'un régime stationnaire (f ne dépend pas de t), résoudre (C).

2) On admet dans la suite que f peut s'écrire sous la forme $f : (x, t) \mapsto g(x)h(t)$, avec $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^2 .

a) (analyse) Soit f une telle solution. Montrer qu'il existe

un réel λ tel que :
$$\begin{cases} \forall x \in [0, 1] & g''(x) = \lambda g(x) \\ \forall t \in \mathbb{R} & h'(t) = \lambda h(t) \end{cases}$$

b) Dans le cas $\lambda = 0$, montrer que gh est nulle.

c) Dans le cas $\lambda > 0$, montrer que gh est nulle.

d) Dans le cas $\lambda < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-\lambda}$. On définit une

fonction impaire, encore notée g ,

en posant $g(-x) = -g(x), \forall x \in [0, 1]$.

Montrer que g est de la forme : $x \mapsto b \sin(\omega x)$ (*), pour un certain b réel. Montrer qu'alors h est de la forme $t \mapsto e^{-\omega^2 t}$.

e) On étend la fonction g en une fonction 2-périodique, et que la relation (*) doit rester vérifiée sur \mathbb{R} . Montrer que nécessairement, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\omega = n\pi := \omega_n \text{ et } \lambda = -n^2\pi^2 := \lambda_n.$$

f) En déduire que toute fonction de la forme

$F_n : (x, t) \mapsto b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$, pour $b_n \in \mathbb{R}$, est solution de C, impaire et 2-périodique par rapport à t .

3) synthèse partielle : en remarquant que l'ensemble des solutions de C est un espace vectoriel, montrer que pour toute suite $(b_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ converge, la fonction

$F : (x, t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$ est de classe C^2 sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ et solution de (C).

4) Remarquer que $\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x)$. Conclure