Suites et continuité dans un espace vectoriel normé

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$N(x,y) = \sup(|x+y|, |x|, |y|)$ est une norme, puis dessiner la boule unité fermée .

Exercice 2

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$N(x,y) = \sup(|x+ty|, t \in [0,1])$ est une norme, dessiner la boule unité fermée pour la distance associée.

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$; démontrer que
$N : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)| \mathrm{d}t$ est une norme

Exercice 4

Soit f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et. si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^4)$; prouver que f est bornée non continue en $(0,0)$ et que sa restriction à toute droite de $\mathbb{R}^2$ est continue.

Exercice 5

Soit f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{y^2 + x^4}$.
Démontrer que f est continue en $(0,0)$

II. Exercices

Exercice 6 *Vrai ou faux*

1. Si N et $\tilde{N}$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^3$, alors il existe $K > 0$ tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ K^{-1} N(x) \leq \tilde{N}(x) \leq K N(x)$.
2. Il n'existe pas de partie de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverte et fermée.
3. Une réunion infinie de compacts est compacte.
4. les seuls ouverts de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 7

On rappelle que les normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{R}^3$ sont définies pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par les expressions : $N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $N_1(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ et $N_\infty(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i|$
1) Dessiner les ensembles :
$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^3,\ N_1(x) \leq 1\}$,
$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^3,\ N_2(x) \leq 1\}$ et
$D_\infty = \{x \in \mathbb{R}^3,\ N_\infty(x) \leq 1\}$
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a :
$N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq \sqrt{3} N_\infty(x)$, et
$N_\infty(x) \leq N_1(x) \leq 3 N_\infty(x)$

Exercice 8

Sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$N(M) = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |M_{ij}|$ pour $M = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$;
a) démontrer que c'est une norme vérifiant pour tous M et M' de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:
$\|MM'\| \leq \|M\| \|M'\|$;
b) $\mathrm{tr}(M)$ désignant la trace de M, déterminer
$|||\mathrm{tr}||| = \sup\{|\mathrm{tr}(M)| / \|M\| = 1\}$.
c) mêmes questions avec
$N(M) = \sup\limits_{1 \leq i,j \leq n} |M_{ij}|$.

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{R}$-e. v. n., a et b deux vecteurs non nuls de E, et pour tout t réel, $f(t) = \|at + b\|$;
a) prouver que f est continue et lipschitzienne ;
b) prouver que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$;
c) Prouver que l'ensemble des réels t tels que $at+b$ appartienne à la boule unité ouverte est soit vide soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 10

inégalités de Hölder Soient $p > 1$ et $q > 1$ deux réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) En utilisant la concavité d'une fonction adéquate, montrer que : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

2) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, établir $\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{|x_i|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|y\|_q^q}$. En déduire $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

3) En écrivant $(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$, montrer que $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

4) Conclure que $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$.

Exercice 11

Soit E et F deux espaces vectoriels normés réels et g une application de E vers F telle que pour tout (x, y) de E^2, $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Démontrer que :

a) si g est continue en 0 alors g est linéaire ;

b) si g est bornée sur $B_f(0_E, 1)$ alors g est linéaire.

Exercice 12

Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$.

Exercice 13

Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_2$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 14

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, muni de la norme : $\| \ \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f(t)|dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : [0; 1] \to \mathbb{R}$, vérifiant : $f_n(0) = n$, $\forall t \in]0, 1], f_n(t) = \min(n, \frac{1}{\sqrt{t}})$, démontrer que f_n appartient à E, la suite (f_n) converge-t-elle ? Prouver que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > K$ et $q > K$, $\|f_p - f_q\|_1 < \varepsilon$.

Exercice 15

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. La suite complexe $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite prenne une infinité de valeurs ; lorsque cette condition est réalisée démontrer que tout arc du cercle trigonométrique contient au moins un point de cette suite.

Exercice 16

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \ \|$ une norme sur E. Soit $h : E \to E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :
$\forall (x, y) \in E^2,\ \|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha$. Montrer que h est continue sur E.

Exercice 17

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \ \|$ une norme sur E. Soit $f : E \to E$ telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ et $a \in E$ vérifiant :
$f(a) = a$;
$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.
Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.