Espaces vectoriels; applications linéaires

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Pour chaque $\mathbb{C}$-espace vectoriel, trouver une famille libre et génératrice : $E_1 = \mathbb{C}[X]$, $E_2 = \{P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$ $E_3 = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(1+X, 1-X, 2X)$.

Exercice 2

Etudier la liberté dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de chacune des familles de fonctions suivantes :

1. $(f_k)_{0\leq k\leq n} = (x \longmapsto (x+1)^k)_{0\leq k\leq n}$;
2. $(g_i)_{1\leq i\leq n} = (x \longmapsto e^{a_i x})_{1\leq i\leq n}$, pour $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts.

(on pourra utiliser les valeurs prises en différents points, les limites, continuité, intégration, dérivation)

Exercice 3

Dans chaque situation, on se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et deux sous-espaces vectoriels F et G, et l'on demande si $E = F \oplus G$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1;1;0),(0;0;1))$, $G = \text{Vect}((1;1;1))$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1;1;0),(0;0;1))$, $G = \text{Vect}((1;0;0))$
3. (*fonctions*) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$, $G = \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)\}$
4. $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \{A \in E;\ {}^tA = A\}$, $G = \{A \in E;\ {}^tA = -A\}$.
5. (*suites réelles*) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F = \text{Vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})$, $G = \text{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}})$

Exercice 4

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P = X^2 + 3X + 1$.

1. Justifier que $F = P\ \mathbb{R}[X]$ (ensemble des multiples de P) est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme Q associe son reste dans la division eucldienne par P.
   (a) Rappeler le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que f est une application linéaire.
   (c) Déterminer l'image et le noyau de f.
3. Soit $G = \mathbb{R}_1[X]$. Justifier que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E.

Exercice 5 *polynôme d'interpolation de Lagrange*

Donner un polynôme réel P de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$. Est-il unique ?

II. A savoir rédiger

Exercice 6

Résoudre :

$$\mathcal{S}_1 \left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 & = & -2 \end{array}\right. ,\ \mathcal{S}_2 \left\{\begin{array}{lcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 7

Soit g_n l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $P + P'$, démontrer que g_n est injective, en déduire qu'elle est surjective et bijective.

Exercice 8

Soient (e_1, e_2, e_3) une base de E, et ψ un endomorphisme de E, tel que $\psi(e_1) = \dfrac{-1}{3}e_2 + \dfrac{2}{3}e_3$, $\psi(e_2) = e_2 + 2e_3$ et $\psi(e_3) = e_2$.

1. Déterminer $\mathcal{V} = \text{Ker}\,\psi$, $\mathcal{W} = \text{Im}\,\psi$, $C = \text{Ker}(\psi - 2\text{Id}_E)$ et $D = \text{Ker}(\psi + \text{Id}_E)$
2. Prouver que $\text{Im}\,\psi = C \oplus D$ et $E = \text{Im}\,\psi \oplus \text{Ker}\,\psi$.
3. ψ est-il un projecteur ?

III. Exercices

Exercice 9

Justifier que l'ensemble $L^1(I,\mathbb{R})$ des fonctions intégrables sur le segment I est un $\mathbb{R}$-e.v. .

Exercice 10

Prouver qu'il existe une seule application linéaire v de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$ telle que $\text{Ker}\,v$ soit engendré par $(1,1,2)$ et $(1,2,0)$ et telle que $v(1,1,1) = (1,1,0,-1)$. Quelle est sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 11

Soient f, g endomorphismes de E tels que $fof = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et $gof + fog = id_E$, prouver que $\text{Im}\,f = \text{Ker}\,f$.

Exercice 12

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f qui à tout P de E associe $P(0) + XP$; Montrer que f est un endomorphisme de E puis sa matrice dans la base canonique de E. Déterminer les noyau et image de f. f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 13

Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à 2. On considère l'application f qui à un polynôme P associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par : $Q = 2P - (X+1)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{V}$.
2. Donner les images par f des polynômes $1, X, X^2, X+1, (X+1)^2$
3. Donner une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 14

Soit $\mathcal{F} = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la famille de fonctions définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(nx)$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)\}$. *indication : on pourra utiliser le fait que* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\mathrm{d}x = \delta_n^p$

2) A l'aide de la fonction cos, montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Exercice 15

Soit E un espace-vectoriel.

1. Démontrer que tout projecteur p de E commute avec tout endomorphisme f de E tel que : $f(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Im} p$ et $f(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Ker} p$;
2. p et q étant deux projecteurs de E, à quelle condition nécessaire et suffisante $p+q$ est-il un projecteur de E ?

Exercice 16

Soient u et v endomorphismes de E de dimension finie n tels que $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $v + u$ soit inversible, démontrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = n$ et $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} v$.

Exercice 17

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, soit $f : P \mapsto X^2P' - 2XP$ prouver que :

1. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$;
2. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$;
3. Soit $g = f - Id$, déterminer $\operatorname{Ker} g$
4. En déduire les solutions polynomiales de : $x^2y' - (2x+1)y = 0$.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 18

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. On considère la famille de formes linéaires $\mathcal{B} = (\varphi_k)_{0\le k\le 3}$ telles que, $\forall P \in E$; $\varphi_k(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P(x)\mathrm{d}x$; démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de E^*, trouver une base (e_j) de E telle que $\varphi_k(e_j) = \delta_j^k$.

Exercice 19

On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. Soient α et β formes linéaires non proportionnelles sur E, démontrer que $\operatorname{Vect}(\alpha,\beta)$ est égal à
$W = \{\varphi;\ \varphi \in E^* \text{ et } \forall x \in \operatorname{Ker}\alpha \cap \operatorname{Ker}\beta,\ \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}\}$.

Exercice 20

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie 3, et f endomorphisme de E tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Démontrer que :
$\{g \in \mathcal{L}(E);\ gof = fog\} = \operatorname{Vect}(Id_E, f, f^2)$
(on pourra prouver qu'il existe u appartenant à E tel que $(u, f(u), f^2(u))$ est libre et chercher les matrices des endomorphismes de E dans cette base).

Exercice 21

Soient p et q projecteurs de E ; prouver

1. $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q \Leftrightarrow p = poq$ et $q = qop$
2. que si $poq = qop$ alors $\operatorname{Im}(poq) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(poq) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
3. que si $p+q$ est un pojecteur alors $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$ et $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}(p+q)$.

Exercice 22

Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = Id_E$. Pour a réel et y vecteur de E fixés résoudre l'équation d'inconnue le vecteur x de E :

$$x + af(x) = y$$

Exercice 23

Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que l'application qui à tout M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\operatorname{Tr}(AM)$ est une forme linéaire ; réciproquement démontrer que pour toute forme linéaire φ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice A telle que pour toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$.