Fonctions de plusieurs variables. Calcul différentiel

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Donner le domaine de continuité le plus grand possible des fonctions :
$f:(x,y)\mapsto \dfrac{1}{x^2+y^2+1}e^{x+y}$ et
$g:(x,y)\mapsto \sqrt{x}(\cos(x-2y))$.

Exercice 2

1) Étudier la continuité en (0,0) de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2) Étudier la continuité en (0,0) de la fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y)=\begin{cases}xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Exercice 3

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\cos(xy)$. On donne $A=(1,2)$ et $V=(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

1. Vérifier que V est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la dérivée de f dans la direction V au point A.

Exercice 4

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes. Lorsqu'elles existent, déterminer les dérivées partielles par rapport à x et à y de ces fonctions sur ces ensembles.
1) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$.
2) $g(x,y)=\ln(1-xy)$.
3) $h(x,y)=x^y$.

Exercice 5

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=e^{x-y}+x^2$, et $A=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ fixé.
1) Déterminer le gradient de f en A. En déduire les extrema éventuels de f.
2) Déterminer la différentielle $\mathrm{d}f_A$ de f en A.

II. Exercices

Exercice 6

Soient $U=\mathbb{R}_*^+\times]-\pi,\pi[$, $V=\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^-\times\{0\}$ et $\varphi:U\to V$, $(\rho,\theta)\mapsto\begin{pmatrix}\rho\cos(\theta)\\ \rho\sin(\theta)\end{pmatrix}$
1) Soit $A=(r,t)\in U$. Déterminer la matrice jacobienne $Jac(\varphi)_A$ de φ en A.
2) En déduire que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U vers V.

Exercice 7

Soient $U=\mathbb{R}_*^+\times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$, $V=\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^-\times\{0\}\times\mathbb{R}$ et

$$\psi:U\to V,\ (\rho,\theta,\phi)\mapsto\begin{pmatrix}\rho\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \rho\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

1) Soit $A=(r,t,p)\in U$. Déterminer la matrice jacobienne $Jac(\varphi)_A$ de φ en A.
2) En déduire que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U vers V.

Exercice 8

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6}{x^6+(x^2-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point A de $\mathbb{R}^2$ et les déterminer. f est-elle pour autant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
2) Montrer que f admet des dérivées selon toutes les directions en (0,0).

Exercice 9

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y)=y^2-y\sqrt{1-x^2}$.
1) Déterminer et représenter l'ensemble de définition D_f de f. Est-ce un ouvert, un fermé ?
2) Déterminer le plus grand ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1.
3) Déterminer les éventuels points critiques de f.

Exercice 10

Déterminer les éventuels points critiques des fonctions suivantes :
1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=e^{x^2y}$.
2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par
$f(x,y)=x^4+y^4-2y^2$.
3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie pour $a,b\in\mathbb{R}^*$ par :
$f(x,y)=x^2y^2(1+y)$.

Exercice 11

1) Rappeler la définition d'un maximum local pour une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les éventuels extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$f(x, y) = e^x + e^y + e^{-x-y}$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 12

On suppose que $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, que $A \in \mathbb{R}^2$ et que $g(A) \neq 0$. Donner les formules pour
$\nabla(fg)(A); \quad \nabla(f + g)(A); \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(A)$.

Exercice 13 *étude locale d'une surface*

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1) pour $h = (u, v)$ au voisinage de 0, écrivez la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour exprimer (à un reste d'ordre 2 près) $f(a+h)$ à l'aide de u, v, $f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$.

2) Associez une matrice symétrique réelle S à la forme quadratique $q : (u, v) \mapsto ru^2 + 2sv + tv^2$.

3) Lorsque $r \neq 0$ et $s^2 - rt < 0$, justifier que $q(u, v)$ est toujours du signe de r.

on pourra écrire $q(u, v) = r[(u + \frac{s}{r}v)^2 + \frac{rt - s^2}{r}v^2]$

4) Lorsque ($r = 0$ et $s^2 > 0$) ou lorsque ($r \neq 0$ et $s^2 - rt > 0$), justifier que $q(u, v)$ prend des valeurs positives et négatives au voisinage de $(0, 0)$.

5) En déduire que si a est un point critique, et si $s^2 - rt < 0$, alors f admet un extremum en a.

6) En déduire que si a est un point critique, et si $s^2 - rt > 0$, alors f admet un extremum en a.

7) Exemple : chercher les extremums de $f : (x, y) \mapsto 1 + x^2 + xy + y^2 + x^2y^2$.

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de la forme
$(x, y, z) \mapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz$, avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$.
Montrer qu'un point $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ est centre de symétrie de la quadrique d'équation $f(x, y, z) = 1$ si et seulement si $\nabla f(\Omega) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Exercice 15 *un problème d'optimisation*

Un industriel souhaite produire une boîte de conserve cylindrique à base circulaire de volume V donné tout en minimisant la quantité de métal employé. Déterminer le rayon R de la base et la hauteur h d'une telle boîte.

Exercice 16 *applications directionnelles*

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue en un point $A = (a, b) \in D$ et $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. La fonction directionnelle $f_{A,\overrightarrow{u}} : t \mapsto f(a+\alpha t, b+\beta t)$ (fonction à une seule variable) est une fonction continue.

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 1$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{1 - \cos x}{2x^2 + y^2}$. En utilisant une fonction directionnelle bien choisie, montrer que f n'est pas continue en (0,0).

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$. Montrer que pour tout $\overrightarrow{u}$ vecteur non nul, la fonction directionnelle $f_{0,\overrightarrow{u}}$ est continue en 0. En considérant $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t, t^2)$, montrez que f n'est pas continue en (0,0). Qu'illustre cette question ?