

Intégration sur un segment

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

- 1) Déterminer l'ensemble \mathcal{E}_+ des primitives de f sur \mathbb{R}^+ .
- 2) Déterminer l'ensemble \mathcal{E}_- des primitives de f sur \mathbb{R}^- .
- 3) En déduire l'ensemble \mathcal{P} des primitives de f sur \mathbb{R} qui sont continues sur \mathbb{R} .

Exercice 2

Soient a, b deux réels tels que $a < b$.

- 1) Déterminer une bijection $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ avec φ affine.
- 2) Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Réécrire l'intégrale $I = \int_0^1 g(u)e^{2\pi i u} du$ comme une intégrale entre $-\pi$ et π .

- 3) Soit $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Réécrire l'intégrale $I = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{it} dt$ comme une intégrale entre 0 et 1.

Exercice 3

Soient $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ une application continue,

$$\text{et } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer $M : x \mapsto \int_0^x AX(t) dt$ à l'aide de U, V, W , les primitives respectives s'annulant en 0 de u, v, w .
- 2) Exemple : $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$, $w : t \mapsto e^{2t}$.

Exercice 4

Justifier que $\varphi : t \mapsto \text{Arctant } t$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

II. A savoir rédiger

Exercice 5

Montrer que pour tout $n \geq 2$, la fonction

$$g_n :]0, 1[, x \mapsto \frac{x^n}{\ln x}$$

peut être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$.

Exercice 6

1. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 2 et à l'ordre 5.

2. Montrer que pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$,

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

III. Exercices

Exercice 7

Etudier l'existence et calculer

- a) $\int_{]a,b[} \frac{1}{(t-a)(b-t)} dt$;
- b) $\int_{]1,+\infty[} (t^6 - t^5)^{-1/3} dt$;
- c) $\int_{]0,\pi/2[} \ln(\cos t) dt$, $\int_{]0,\pi/2[} \ln(\sin t) dt$, $\int_{]0,\pi/2[} \ln(\sin(2t)) dt$;
(on cherchera des relations entre ces réels)
- d) $\int_{]-\pi/2,\pi/2[} \tan t dt$;

Exercice 8

Calculer $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 2} dt$
(on pourra poser $u = \text{Arccost}$, puis $\varphi = \frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}$)

Exercice 9

Calculer $\int_0^{2\theta} \frac{t}{\cos(t-\theta)} dt$, avec $\theta \in [0, \pi/2[$.
(on pourra poser $u = t - \theta$)

IV. Pour aller plus loin

Exercice 10

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

- Justifier que $m = \min\{f(x), x \in [0, 1]\}$ et $M = \max\{f(x), x \in [0, 1]\}$ sont bien définis.
- Montrer que

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leq -mM.$$

Exercice 11

Soit f définie sur $[a, b]$ vers \mathbb{C} , et

$$J_n = \int_{[a,b]} f(t)e^{int} dt.$$

Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ lorsque :

- f est de classe \mathcal{C}^1 ;
- f est en escalier ;
- f est continue par morceaux ;

Exercice 12

Soit f fonction de classe \mathcal{C}^3 de $[a, b]$ vers $(E, \|\cdot\|)$; montrer que si M est un majorant de $\|f^{(3)}\|_{\infty, [a,b]}$ alors

$$\|f(b) - f(a) - (b-a)f'(\frac{a+b}{2})\| \leq \frac{M(b-a)^3}{24}.$$

Exercice 13

(formule de Simpson)

- Soit f impaire de classe \mathcal{C}^5 sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R} , prouver que pour tout $x > 0$ il existe $\theta \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) = \frac{x}{3}(f'(x) + 2f'(0)) - \frac{x^5}{180}f^{(5)}(\theta).$$

(on pourra poser $\varphi : t \mapsto f(t) - \frac{t}{3}(f'(t) + 2f'(0)) + \frac{t^5 A}{180}$, avec $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$, puis calculer $\varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi^{(4)}$, montrer que $\varphi^{(i)}(0) = 0$ pour $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ et en déduire que A peut s'écrire $A = f^{(5)}(\theta)$ pour $\theta \in]0, x[$)

- Soient $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^4 , et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\exists \zeta \in]a, b[, f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})] - \frac{(b-a)^5 f^{(5)}(\zeta)}{2880}.$$

N.B. : on pourra poser $x = \frac{b-a}{2}$,

$$g : [-x, x] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t + \frac{a+b}{2}) - f(-t + \frac{a+b}{2})$$

lui appliquer le 1) - noter θ le réel associé-, puis à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $\zeta \in]a, b[$ tel que

$$f^{(5)}(\zeta) = \frac{1}{2}[f^{(5)}(\theta + \frac{a+b}{2}) + f^{(5)}(-\theta + \frac{a+b}{2})]$$

V. Vrai ou faux

- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est k fois dérivable ($k \geq 1$), alors $D^{k-1}f$ est continue.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est k fois dérivable ($k \geq 1$) et si $D^k f$ est continue, alors f est de classe \mathcal{C}^k .
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^k , alors f est k fois dérivable.
- Toute primitive G d'une fonction en escalier $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- Etant donnée $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue par morceaux, il existe une primitive G de g continue.