Formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

I. Constante d'Euler

Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{1}{t}$. Pour tout $n \geq 1$, on note $w_n = \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n+1)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge (on pourra utiliser des encadrements des sommes partielles avec des intégrales).
2. Montrer que pour tout $N \geq 1$, $\sum_{k=1}^{N-1} w_k = 1 + \ln(N) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.
3. En déduire que la suite $(g_N)_{N\geq 1}$ définie pour tout $N \geq 1$ par $g_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \ln N$ converge vers une limite notée γ. Cette limite est appelée « constante d'Euler ». Elle vaut environ $0,577...$

II. Formule de Stirling

On pose $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x$, et pour tout $k \geq 1$, $v_k = \int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t - g(k+1)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = n\ln n - n + 1 - \ln(n!) \tag{1}$$
2. Soit $k \geq 1$ fixé.
   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $v_k = -\int_k^{k+1} \frac{(t-k)}{t}\mathrm{d}t$.
   (b) A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $v_k = \frac{-1}{2(k+1)} - \frac{1}{2}x_k$, où $x_k = \int_k^{k+1} \frac{(t-k)^2}{t^2}\mathrm{d}t$.
3. A l'aide d'une majoration, montrer que $\sum_{k\geq 1} x_k$ converge vers une limite ℓ.
4. (a) En reportant dans (1), montrer que : $\forall n \geq 1$, $\ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} x_k$
   (b) En déduire que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + o(1)$, où $K = \frac{1}{2}(1+\gamma+\ell)$.
5. En déduire que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}n^n e^{-n} e^K$

III. Calcul de e^K

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\ \mathrm{d}x$ (intégrale de Wallis)

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$, et $I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.
2. En déduire que $I_n I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$
3. (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante, et en déduire que :
   pour tout $n \geq 1$, $I_n I_{n+1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$.
   (b) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
4. Exprimer I_{2p} en fonction de p et π d'une part, et en fonction de e^K et π d'autre part. En déduire que $e^K = \sqrt{2\pi}$.

Conclure.