Dérivation des fonctions de la variable réelle

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Pour tout $t \geq 0$, calculer $\|f(t)\|$ (où $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle).
3. Représenter la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes par $(x(t), y(t)) = f(t)$, pour $t \geq 0$.
(on pourra remarquer que l'affixe du point $f(t)$ est te^{it} et placer $f(t_0)$, $f(t_0+2\pi)$, $f(t_0+4\pi)$ pour des valeurs de t_0 "bien choisies")

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{C},\ t \mapsto \dfrac{1}{t}e^{it}$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$, et tracer l'ensemble $\{\varphi(t),\ t > 0\}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\sqrt{t}, t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
3. Représenter la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes par $(x(t), y(t)) = f(t)$, pour $t \geq 0$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$. On considère un mobile dont la position à l'instant t est $f(t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En projection sur le plan (Oxy), quel est le mouvement du mobile ?
3. Représenter la trajectoire.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(|t|)$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? f est-elle continue $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$? Même questions pour $g : t \mapsto (f(t), f(t^2))$.

Exercice 6

Déterminer les points singuliers de la courbe représentative de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

II. Exercices

Exercice 7

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :
$f : x \mapsto x^{n-1}\ln(1 + (1/x))$;
$g : x \mapsto \exp(2x)\cos^2 x$;

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
Proposer une interprétation cinématique.

Exercice 9

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Justifier que l'application
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det(A - tI_n)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 10

Soit f application continue de $\mathbb{R}$ vers E un espace vectoriel euclidien.
Démontrer que $f$est dérivable en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ existe dans E
(utiliser les propriétés des limites pour x ,..., $x/2^n$, et ajouter les inégalités)

III. Révisions

Exercice 11

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$

Exercice 12

Donner une éventuelle limite en 0 de $g : x \mapsto (\cos x)^{1/x^2}$.

Exercice 13

Etudier au moyen d'un développement « asymptotique »pour $x \to +\infty$ l'asymptote oblique à la courbe représentative de $h : x \mapsto \dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$ au voisinage de $+\infty$

Exercice 14

Soit $u :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{t}{\sin t}$.

1) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi[$, et donner l'expression de sa dérivée en tout point.

2) Montrer que u' admet une limite à droite en 0.

3) En déduire que u peut être prolongée en 0 en une fonction $\tilde{u}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.

Exercice 15

1) Vérifier que pour tout x, $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$.

En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de $w : x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$

3) Résoudre et déterminer éventuellement une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$x\ y' + 2y = \frac{x}{1+x^2} \qquad (E)$$

IV. Portraits de phase

Exercice 16 *portraits de phase*

Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ fixée.

Soient x, y les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

Et la condition initiale $M(0) = (1,0)$ et $M'(0) = (0,1)$. Dans chaque cas, tracer les trajectoires respectives des points $M(t) = (x(t), y(t))$:

1. $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$
2. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
3. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$
4. $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$

Exercice 17 *portraits de phase, cas complexe*

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ fixée possédant deux valeurs propres distinctes non réelles λ_1 et λ_2. Soit $v_1 = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ fixés.

1. Justifier que $v_2 = \overline{\alpha}\,\vec{i} + \overline{\beta}\,\vec{j}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_2 et que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.
2. Que dire de la matrice $P = \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\alpha} \\ \beta & \overline{\beta} \end{pmatrix}$?
3. Résoudre le système différentiel $\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$.
4. Soient x, y les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

   Et la condition initiale $M(0) = (1,0)$ et $M'(0) = (0,1)$. On pose $\lambda_1 = r + \mathrm{i}s$, avec r, s réels
   En déduire que x est de la forme $x : t \longmapsto (a\cos(st) + b\sin(st))e^{rt}$
   et que y est de la forme $y : t \longmapsto (c\cos(st) + d\sin(st))e^{rt}$, avec a, b, c, d réels.
5. Avec la condition initiale $M(0) = (1,0)$ et $M'(0) = (0,1)$, dans chaque cas, tracer les trajectoires respectives des points $M(t) = (x(t), y(t))$:
   (a) $(r,s) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$
   (b) $(r,s) \in \mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}$
   (c) $r = 0$ et $s \in \mathbb{R}$