Intégrales multiples, aires et volumes

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Calculer l'aire d'une sphère de rayon R.

Exercice 2

Calculer le volume d'une sphère de rayon R.

Exercice 3

Calculer l'aire et le volume d'un cylindre de hauteur H et de base circulaire et de rayon R.

Exercice 4

Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$.

II. Exercices

Exercice 5

On considère l'arc défini par la représentation : $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = (\sin t)(2 - \sin^2 t) \end{cases}$

Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe.

Exercice 6

On considère D l'ensemble défini par $D = \{(x, y);\ x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \text{ et } x + y \leq 3\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 7

Reconnaître la courbe d'équation $x^2 - 2x + y^2 = 0$ et calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{2x}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 2x + y^2 \leq 0,\ y \geq 0\}$

III. Pour aller plus loin

Exercice 8

Calculer $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, où D est l'ensemble défini par

$D = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$,

pour $R \in \mathbb{R}_*^+$ fixé.

Exercice 9

Calculer la mesure V du volume intérieur aux deux surfaces d'équations respectives $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x^2 + y^2 = z^2$.

Exercice 10

Déterminer le centre d'inertie d'une demi-sphère pleine homogène.

Exercice 11

Soit Γ une courbe fermée paramétrée en polaire par une fonction $\rho : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^+,\ \theta \mapsto \rho(\theta)$. On suppose que le point O appartient au domaine Δ borné délimité par Γ.

1) Montrer que l'aire A de Δ peut s'écrire :

$$A = \int_{[0,2\pi[} \frac{1}{2}\rho(\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

2) Application : montrer que l'aire de l'ellipse pleine $\mathcal{E}$ de centre O et de demi-grand axe a et de demi-petit axe b vaut πab.

(on rappelle que $\rho : \theta \mapsto \dfrac{b}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}}$, avec $e = c/a$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ est une paramétrisation de $\mathcal{E}$ dans un repère de centre delui de l'ellipse)

3) Retrouver ce résultat en calculant $I = \displaystyle\int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$.