

Intégration, dérivation, de suites et séries de fonctions

I. Applications directes du cours

Exercice 1 Intversion \lim_n et \int :

Théorème de convergence dominée

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t^2} dt \text{ admet une limite que l'on précisera.}$$

Exercice 2 Intversion \sum et \int :

Théorème d'intégration terme à terme

$$\text{On admet que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\text{Montrer que } \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\frac{\pi^2}{6}$$

II. A savoir rédiger

Exercice 3

a) Montrer que la fonction $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée en tout point.

b) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.

c) De même calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$.

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{C}([1, e], \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n \int_1^{1+1/n} f(t^n) dt$

Montrer que $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$

Cas particulier : $f : x \mapsto x$

Exercice 5

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0, n[} \frac{(1 - \frac{t}{n})^n}{t^{\alpha-1}} dt$ pour $\alpha < 2$

Exercice 6

Soit a réel de $]0, \pi[$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n définie sur $]0, \pi[= I$ par $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sin t}$ et $I_n(a) = \int_{]0, a[} f_n(t) dt$

a) étudier l'intégrabilité de f sur I ;

b) Calculer $I_{n+1}(\pi) - I_{n-1}(\pi)$, en déduire pour tout n , $I_n(\pi)$

c) Trouver une relation entre $I_n(\pi - a)$ et $I_n(a)$

d) prouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1}(a) - I_n(a) = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = \frac{\pi}{2}.$$

e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0, a[} \frac{\sin(nt)}{t} dt$ et $\int_{]0, +\infty[} \frac{\sin t}{t} dt$

III. Exercices

Exercice 7 Intversion D et \sum : *Théorème de dérivation terme à terme*

Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx+1}{1+n^3}$ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée en tout point.

Exercice 8

Calculer $J_{p,q} = \int_{]0, 1[} t^p(1-t)^q dt$; prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n,n} = 0$;

prouver que $\sum_{n \geq 1} J_{n,n}$ converge et donner sa somme sous forme d'une intégrale que l'on calculera;

Exercice 9

Calculer :

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} (1/n!) \int_{]1, x[} (\ln t)^n dt.$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{]0, x[} t^n (1-t^2)^{1/2} dt.$$

Exercice 10

(la fonction dzêta de Riemann) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n^x}$.

On a vu au chapitre 5 que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge

simplement sur $]1, +\infty[$, et normalement sur tout $[a, +\infty[$, pour $a > 1$. On note $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sa somme.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normale-

ment sur tout $[a, +\infty[$, pour $a > 1$.

2) En déduire que ζ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$

Exercice 11

- 1) Soit $U_N = \int_{[0,1/2]} (1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n t^{2N}) dt$; Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = \lambda$; puis donner la nature de la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - \lambda)$
- 2) Soit $V_N = \int_{[0,1]} (1 + t + t^2 + \dots + t^N) dt$; Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} V_N$.

Exercice 12

Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Exercice 13

- Soit (f_n) suite de fonctions réelles définies sur $[0, 1]$, pour $n \geq 1$, par $f_n(x) = \frac{n(x^5 + x)e^{-x}}{nx + 1}$;
- a) Prouver que (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[0, 1]$.
- b) Prouver que $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{(nx + 1)}$.
- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_n(t) dt$.

Exercice 14

- 1) Justifier que pour $n \in \mathbb{N}, x \mapsto \frac{x^n}{(x^2(1-x))^{1/3}}$ est intégrable sur $]0, 1[$. 2) Donner une formule de récurrence sur $J_n = \int_{]0,1[} \frac{x^n}{(x^2(1-x))^{1/3}} dx$.
- 3) Calculer J_0 puis une expression de J_n avec des factorielles
- 4) Calculer la limite de (J_n) à l'aide du théorème de convergence dominée.

Exercice 15

Démontrer que les fonctions $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{1+n^2}$ et $\psi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)^x}$ sont définies et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 16

Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1+t^n}{\sqrt{t+t^{2n}}} dt$ (distinguer deux cas pour a)

IV. Pour aller plus loin

Exercice 17

- Soit $x \in]0, \pi[$, et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R} par $u_n : t \mapsto t^{n-1} \sin(nx), \forall n \geq 1$.
- 1) Pour tout $N \geq 1$, on pose $S_N = \sum_{k=1}^N u_k$. Montrer qu'il existe une suite $(P_N)_{N \geq 1}$ de fonctions polynômes telle que pour tout $N \geq$ et tout $t \in \mathbb{R}, S_N(t) = \frac{P_N(t)}{t^2 - 2t \cos x + 1}$.
- 2) Prouver l'existence et calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$.
- 3) Calculer $\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{\sin(Nx)}{N}$.

Exercice 18

- Soit f définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto 4E(x) - 2E(2x) + 1$
- a) Calculer $u_n = \int_{[0,1]} g(nt) dt$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$;
- b) Pour g en escalier sur $[0, 1]$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} g(t) f(nt) dt$.
- c) Pour h continue sur $[0, 1]$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} h(t) f(nt) dt$.

V. Définir une fonction par une expression sommatoire

Exercice 19 Etude d'une somme de fonctions

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
- $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathcal{D} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
On note S la somme de cette série de fonctions.
 - Montrer que S est de classe C^1 sur \mathcal{D} et étudier le signe de $S'(x)$ suivant les valeurs de $x \in \mathcal{D}$.
 - Montrer que S admet une limite en 1.
 - Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire que S tend vers 0 en $+\infty$.
 - Donner le tableau de variations de S , puis tracer l'allure de la courbe représentative de S .

Exercice 20 Intégrale d'une somme de fonctions

- Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$.
- Justifier que l'on définit bien une fonction f sur \mathbb{R}_*^+ par l'expression précédente.
 - Montrer que f est continue sur $I =]0, +\infty[$.
notons qu'il suffit de montrer le résultat sur tout segment de I
 - Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ et que
- $$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1+\sqrt{n+1})}$$
- Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$