

Intégrales à paramètre

I. A savoir JUSTIFIER : interversions de symboles

I.1 Intersion \int et \lim

1.a) Majorations

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur \mathbb{R}^+ .
Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx} dt$ est définie et tend vers 0 en $+\infty$.

1.b) Théorème de continuité sous le signe intégral

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f_x :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\ln(1+t^x)$.

Soit $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^1 \ln(1+t^x) dt$

1. Pour $x \neq 0$, montrer que $f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} x \ln t$.
2. En déduire que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

I.2 Intersion \int et D

2.a) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un segment

Exercice 3

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x} dt$.

Montrer que f est décroissante, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

2.b) Théorème de dérivation sous le signe intégral sur un intervalle quelconque

Exercice 4

Déterminer l'ensemble maximal (pour l'inclusion) Δ tel que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{1+tx} e^{-t^2} dt$ est définie, continue et dérivable sur Δ .

II. A savoir rédiger

Exercice 5

Justifier que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.

Exercice 6

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} (1 + \cos(tx)) dt$.

1. En notant, pour $x > 0$, $f_x : t \mapsto 1 + \cos(tx)$ et F_x une primitive de f_x , exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de $F_x(x^3)$ et $F_x(x^2)$.
2. En déduire que φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.

III. Exercices

Exercice 7

Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t+t^3}}$, puis tracer sa courbe représentative C_f .

On pourra montrer que pour tout $x > 0$,
 $0 < f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x+x^3}}$.

Exercice 8

On pose $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)t^x}$.

- 1) Etudier le domaine de définition \mathcal{D} de f .
- 2) Montrer que f est décroissante sur \mathcal{D} .
- 3) Montrer que f est continue sur \mathcal{D} .
- 4) Donner une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$, pour $x \in \mathcal{D}$.
- 5) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$.

- 1) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que :

$$\forall x, f'(x) = 2xf(x)$$

- 3) En déduire que :

$$\forall x, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}.$$

Exercice 10

Etudier la fonction $g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$, puis tracer sa courbe représentative C_g .

(on pourra montrer que la fonction $v : x \mapsto 2x + 2x^3 - 1 - x^4$ s'annule en exactement deux valeurs β et γ que l'on ne cherchera pas à calculer. Pour le tracé, on admettra $\beta \approx 0,4$ et $\gamma \approx 1,7$)

IV. Pour aller plus loin

Exercice 11 Transformée de Laplace du sinus cardinal

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $I(A) = \int_0^A \frac{\sin t}{t} dt$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
2. En remarquant que $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$, montrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ .
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-xt} dt$.
Montrer que φ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ .
4. (a) Montrer que : $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.
(b) Montrer que : $\forall x > 0$, $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{x}$.
(c) En déduire que $\forall x > 0$, $|\varphi(x) - \frac{\pi}{2}| = \text{Arctan } x$.

Exercice 12

Pour tout réel positif x , on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que f est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
2. Montrer que g est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
3. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) + g'(x) = 0$.
4. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ existe.
7. Conclure que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 13

Soient $A = [0, +\infty[$, $I = [0, +\infty[$, et

$F : A \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto xe^{-xt}$. Montrer que :

- 1) pour tout $t \in I$, $\varphi_t : x \mapsto F(x, t)$ est continue.
- 2) pour tout $x \in A$, $\psi_x : t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux.
- 3) pour tout $x \in A$, ψ_x est intégrable sur I .
- 4) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_I F(x, t) dt$ n'est pas continue sur A .

Exercice 14 la fonction Gamma

On considère la fonction

$$\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- 1) Justifier la définition ci-dessus, puis étudier sa continuité.
- 2) Calculer $\Gamma(1)$.
- 3) Montrer que pour tout $x > 0$,
 $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ (*).
- 4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$
- 5) Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et calculer $\Gamma^{(2)}$.
- 6) Montrer que Γ est convexe sur $]0, +\infty[$.
- 7) A l'aide de (*), montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- 8) En formant le quotient $\frac{\Gamma(x)}{x}$, montrer que la courbe représentative de Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.
- 9) a) En utilisant l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, n], 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

- 9b) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

- 9c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$