Intégrales impropres, fonctions intégrables.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soient $B > 1$, $\varepsilon \in]0,1[$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_1^B \frac{1}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que $f_\gamma : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\gamma > 1$.

c) De même, montrer que $f_\gamma : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\gamma < 1$.

Exercice 2

Soit $k < 0$ fixé. Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{kt}\,\mathrm{d}t$.

II. A savoir rédiger

Exercice 3

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x+x^2}$.

a) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}_*^+$.

b) Donner un équivalent de f au voisinage de 0. En déduire que f est intégrable au voisinage de 0.

c) Dominer f au voisinage de $+\infty$ par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

d) Conclure que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 4

Soit $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}+x^2}$.

a) Justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}_*^+$.

b) Donner un équivalent de g au voisinage de 0. En déduire que f est intégrable au voisinage de 0.

c) Dominer g au voisinage de $+\infty$ par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

d) Conclure que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

III. Exercices

Exercice 5

Etudier l'intégrabilité sur $I = \mathbb{R}_*^+$ de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{(1+x^2)\sqrt{x}}$.

Exercice 6

Etudier l'intégrabilité sur $I = [1,+\infty[$ de f où $f(x)$ vaut :

a) $\dfrac{\sin x}{x^3\ln(1+x)}$;

b) $\ln(e^{\beta x}+x)$, selon les valeurs de β ;

Exercice 7

Etudier l'intégrabilité sur $I = [1,+\infty[$ de $x \mapsto x^{-n}\ln x$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge. (utiliser les suites $(u_N) = (\displaystyle\int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t)$ et $(v_N) = (\displaystyle\int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t)$)

IV. Pour aller plus loin

Exercice 9 *Intégrales de Bertrand*

Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, et $f_{\alpha,\beta} : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$.

a) Pour $\alpha > 1$, remarquer que $1 < \dfrac{1+\alpha}{2} < \alpha$, puis justifier que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$. Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$

b) Pour $\alpha < 1$, remarquer que $1 > \dfrac{1+\alpha}{2} > \alpha$, puis justifier qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$.
Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$

c) Pour $\alpha = 1$, montrer que $f_{1,\beta}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$. *(on pourra faire un changement de variable)*

Exercice 10 *intégrale "semi-convergente"*

Soit $h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } E(x) \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{(x-1)} & \text{si } E(x) \text{ est impair} \end{cases}$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{2n}^{2n+2} |h(x)|\mathrm{d}x = 2\int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_2^N |h(x)|\mathrm{d}x \geq \int_2^N \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
En déduire que h n'est pas (absolument) intégrable sur I.

c) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_2^N h(x)\,\mathrm{d}x = 0$

d) En encadrant $B/2$, montrer que :$\forall B > 2$, $\displaystyle\left|\int_0^B h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{2E(B/2)} h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{2E(B/2)}$.

e) Conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, sans que h soit intégrable sur $[2,+\infty[$.