Séries entières

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} z^n$; b) $\sum_{n\geq 0} n z^n$; c) $\sum_{n\geq 0} 3^n z^n$;

Exercice 2

Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$;

II. A savoir rédiger

Exercice 3

Soit $x \in]-1,1[$

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$;
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$;
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$, puis calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

Exercice 4

Trouver la solution F développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $xy" + 3y' - 4x^3 y = 0$, vérifiant la condition initiale $F(0) = 1$ et $F'(0) = 0$.

Exercice 5

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(3x)}{\operatorname{sh} x}$ est DSE sur un intervalle ouvert centré en 0, et donner son rayon de convergence.

III. Exercices

Exercice 6

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $a_n =$:

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\frac{n^n}{e^n n!}$; c) $\frac{\ln n}{\ln n + 1}$; d) $\begin{cases} (-1)^n & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$;

e) $\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$; f) $\frac{e^{in\theta}}{n}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé ;

Exercice 7

Développer en série entière sur un voisinage de l'origine $]-a,a[$, les fonctions suivantes :

a) $g : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.

b) $h : x \mapsto (\sin x)^2$

Exercice 8

A l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh} n} x^{2n}$

Exercice 9

Pour a réel positif non nul étudier la convergence sur $]-1,1[$ de $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{an}$;

donner un majorant de la valeur absolue du reste d'ordre N sur $[0,1]$ et prouver que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+an}.$$

Exercice 10

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\cos z| \leq \operatorname{ch} |z|$.

Exercice 11

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \operatorname{sh} x$.

Exercice 12

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} z^n$.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 13

1) Rappeler l'expression des dérivées des fonctions Arctan et Argth.
2) En déduire que ces deux fonctions sont développables en série entière sur $]-1,1[$, et donner leur expressions sommatoires.
3)Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

Exercice 14

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose
$u_n = \int_0^1 \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\mathrm{d}t$

Exercice 15

Soient a_0 et b_0 deux éléments de $\mathbb{C}$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4a_{n+1} = a_n + 3b_n$ et $4b_{n+1} = 12a_n + b_n$.
Déterminer rayon de convergence et somme des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Exercice 16

Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et sa somme en cherchant une équation différentielle du 3e ordre qu'elle vérifie.

Exercice 17

Notons $H_0 = 1$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} \in \mathbb{R}[X]$.

1) Pour $k \geq 0$ entier fixé, terminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} H_k(n) z^n$, et calculer la somme de cette série entière en tout point du disque ouvert de convergence.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier (en une ligne) que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) En déduire le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n\geq 0} (n^3 + 2n + 1) z^n$.

Exercice 18

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R', justifier que :
1) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R' \leq R$.
2) a) comparer R etR' lorsque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$;
b) montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n$ a un rayon de convergence R" tel que $R" \geq RR'$;
c) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n^3 z^n$ est R^3 ;
d) montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$;

Exercice 19

Soit $R > 0$, et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On suppose que $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n$ converge. Montrer que $S : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie et continue sur le disque fermé $D_f(0, R)$.