

Suites et séries de fonctions

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction \exp .

Exercice 2

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - (\cos(\pi x))^n$.

- 1) Notons $J =]-1, 0[\cup]0, 1[$. Montrer que (f_n) converge simplement vers f sur J .
- 2) (f_n) converge-t-elle simplement vers f sur $] -1, 1[$?
- 3) Montrer que l'on peut approcher f uniformément sur $H =]1/4, 1/2[$ à l'aide d'éléments de la suite (f_n) .

Exercice 3

Soit $I =]-1, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Etudier la convergence normale sur I de la série de fonctions $\sum f_n$.

Même question en restriction à $J = [-1/2, 1/2]$.

Exercice 4 Interverson \sum et \lim : Théorème de la double limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1 + xn(n+1)}$

1. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et que sa somme vaut 1.
2. Justifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ .
3. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1 + xn(n+1)}.$$

II. A savoir rédiger

Exercice 5

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$, où f_n est définie pour $x \in [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{nx}{n^4 + x^2}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ . On note S sa somme.

2) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_\infty$.

3) La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}^+ ? Normalement sur tout segment de \mathbb{R}^+ ?

4) Montrer que la fonction S est continue sur \mathbb{R}^+ , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.

Exercice 6 la fonction dzêta de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{n^x} \text{ et } g_n : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$, et normalement sur tout $[a, +\infty[$, pour $a > 1$. On note $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sa somme.

2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$, et normalement sur tout $[a, +\infty[$, pour $a > 1$. On note $\tau :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sa somme.

3) Montrer que pour tout $x > 1$, on a $\tau(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

III. Exercices

Exercice 7

Pour chaque suite de fonctions dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, étudier la convergence simple sur I vers une éventuelle fonction limite :

a) $I = [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n(1-x)^n$;

b) $I = [0, \pi/2]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto (\cos x)^n$;

c) $I = [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n : x \mapsto \frac{1}{1 + n^2 x^2}$;

d) $I = [0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $i_n : x \mapsto \frac{2n}{1 + n^2 x^2}$;

e) $I = [-1/2, 1/2]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $j_n : x \mapsto \sum_{k=n}^{2n} x^k$.

en cas de convergence, on peut se demander si l'on peut approcher uniformément la limite à l'aide d'éléments de la suite

Exercice 8

Justifier que l'on définit bien une fonction de classe \mathcal{C}^0 en posant $f : t \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n^2}$. Vérifier que f est 2π -périodique.

Exercice 9

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Exercice 10

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n^2}.$$

Exercice 11

Démontrer que les fonctions $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{1+n^2}$ et $\psi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n)^x}$ sont définies et continues sur $[0, +\infty[$

Exercice 12

Soit $A > 0$, et $I = [0, A] \subset \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1 + \frac{x}{n})$.

1. En utilisant l'inégalité $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ valable sur \mathbb{R}^+ , montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle, notée $\tilde{0}$.
2. Retrouver ce résultat en majorant $|f_n(x) - \tilde{0}(x)|$ à l'aide de l'inégalité des accroissements finis.
3. Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur I .

Exercice 13

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- (a) Justifier qu'il existe une suite (P_N) de fonctions polynômes telle que :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0, \forall N \geq N_0, \|f - P_N\|_{\infty, [0,1]} \leq \varepsilon$ (*)
(on pourra utiliser le théorème de Weierstraß)
- (b) Justifier que : $\forall N \in \mathbb{N}, \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \int_0^1 |f(t)P_N(t)| dt + \int_0^1 |f(t)(f(t) - P_N(t))| dt$
- (c) Justifier que $|f|$ est bornée par une constante M sur $[0, 1]$.
- (d) Soit $\varepsilon > 0$ et N_0 associé comme dans (*).
 Montrer : $\forall N \geq N_0,$
 $0 \leq \int_0^1 |f(t)(f(t) - P_N(t))| dt \leq M\varepsilon$
- (e) On suppose dans cette question que :
 $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k f(x) dx = 0$. Montrer que $|f|^2$ puis f sont identiquement nulles

Exercice 14

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 2π -périodique. Prouver que si $\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx = 0$ alors f est identiquement nulle (on pourra utiliser le théorème de Weierstraß).

IV. Pour aller plus loin

Exercice 15

Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, (p_n) une suite de fonctions polynomiales telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} |p_n(x) - f(x)| = 0$, $\ell \in [0, 1]$ et $(x_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x_n) = f(\ell)$

Exercice 16

Soit $\mathcal{A} = \left\{ \varphi_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1+tx}{1+x^2}; t > 0 \right\}$. Montrer que la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ peut être approchée uniformément par les éléments de \mathcal{A} .

Exercice 17

Soit $x \in]0, \pi[$, et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur \mathbb{R} par $u_n : t \mapsto t^{n-1} \sin(nt), \forall n \geq 1$.

- 1) Pour tout $N \geq 1$, on pose $S_N = \sum_{k=1}^N u_k$. Montrer qu'il existe une suite $(P_N)_{N \geq 1}$ de fonctions polynômes telle que pour tout $N \geq$
 et tout $t \in \mathbb{R}, S_N(t) = \frac{P_N(t)}{t^2 - 2t \cos x + 1}$.
- 2) Justifier l'existence et calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt$.
- 3) Calculer $\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.