Séries de nombres réels ou complexes

I. Applications directes du cours

Exercice 1 *Vrai ou Faux*

a) on ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

b) Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_{2p}$ et $\sum u_{2p+1}$ convergent.

c) Si $\sum u_{2p}$ et $\sum u_{2p+1}$ convergent alors $\sum u_n$ converge.

d) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\frac{1}{n^2})$, alors la série $\sum u_n$ converge.

e) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \frac{1}{n^2}$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\geq 0} = (a^n)_{n\geq 0}$. Calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{i=0}^{N} a^i$, pour $N \in \mathbb{N}$. Nature de $\sum u_n$.

Exercice 3

Etudier la convergence des séries de terme général :

$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On pourra remarquer que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$.

$v_n = \dfrac{x^n}{n!}$, pour x réel positif fixé.

Exercice 4

Sachant que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, que pensez-vous de la nature des séries suivantes ?

$\sum v_n$, pour $v_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}$.

$\sum w_n$, pour $w_n = \dfrac{1}{n^2}$ si n est pair, $w_n = 0$ sinon.

II. A savoir rédiger

Exercice 5

Donner la nature des séries de terme général :

$u_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ avec $(n \geq 2)$; $v_n = \dfrac{n!}{4^n}$; $w_n = \sin(\dfrac{\pi}{n^2})$; $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$; $y_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$; $z_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1\right)^n$;

$t_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{3/2}}$.

Exercice 6

Donner la nature des séries suivantes de terme général :

a) $\dfrac{1+\sqrt{n}\cos(n\pi)}{n^2}$; b) $\dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$; c) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

d) $\dfrac{\alpha^n}{(n^2+1)}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$;

III. Exercices

Exercice 7

Démontrer que la série de Bertrand de paramètres α et β définie par $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

on pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, et $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On notera ℓ la somme de cette série.
2. A l'aide d'un encadrement par des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$, montrer que $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \int_0^B \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \ell$. Commentaire.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $|\sin t| \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. En déduire une minoration de v_k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. Donner la nature de la série $\sum_{k\geq 0} v_k$. Commentaire.

Exercice 9

Soit (u_n) une suite de réels. Comparer la nature des séries à termes positifs

1. $\sum u_n$;
2. $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$;
3. $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$;
4. $\sum \ln(1+u_n)$

Exercice 10

En utilisant des intégrales, donner un encadrement et un équivalent en $+\infty$ des sommes partielles d'ordre n des séries suivantes de terme général u_n :

1. $u_n = 1/n^\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$;
2. $u_n = \ln n/n$

Exercice 11

Discuter selon la valeur des paramètres réels a, b, α, β la nature des séries suivantes de terme général : a) $\dfrac{(na)^n}{n!}$; b) $\dfrac{\alpha^n}{n+\beta^n}$; c) $a^{\sqrt{n}}$; d) $\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{a}$; e) $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$; f) $\displaystyle\int_0^{1/n} \operatorname{Arcsin}(x)^\alpha \mathrm{d}x$. g) $a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$;

Exercice 12

En utilisant des séries étudier la convergence des suites $s_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln n}{2}$, et $t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+n}} - \operatorname{Argsh} n$.

Exercice 13

Soit (a_n) une suite décroissante de termes positifs telle que $\sum a_n$ converge, étudier la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

Exercice 14

Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En notant S sa somme, déterminer un entier N, pour que $S - S_N < 10^{-2}$, en déduire une valeur approchée de S à 2.10^{-2} près.

Exercice 15

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$, en déduire que $s_n \sim \ln n$ quand n tend vers $+\infty$;

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = s_n - \ln n$, démontrer que (u_n) est une suite décroissante convergente de limite notée γ, prouver que $s_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$;

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, démontrer que $\sigma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$, et que (σ_n) est une suite convergente et calculer sa limite ; retrouver ce résultat en remarquant que $\sigma_{2n} = s_{2n} - s_n$;

IV. Pour aller plus loin

Exercice 16

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n$ où λ est réel et $\sum v_n$ est une série absolument convergente

1. Pour tout n, on pose $w_n = \ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}) + \dfrac{\lambda}{n}$. Prouver que $\sum w_n$ est une série absolument convergente.
2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\lambda}$, pour un réel $A > 0$.
3. Etudier $\sum \left(\dfrac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.(2n)}\right)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 17

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $\ln x = x - n$, a une solution unique dans $[1, +\infty[$ notée x_n, étudier la nature de $\sum (x_n)^\alpha$, pour α réel.

Exercice 18

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes, démontrer que les séries de terme général $a_n = \sqrt{u_n v_n}$ et $b_n = \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ sont convergentes.