Exercice 1

On considère la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Soit $B = A^2 + 2I$. Déterminer les valeurs propres de B et les sous-espaces propres associés. B est-elle diagonalisable ?

2) Vérifier que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

3) Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction des matrices B et I.

4) On s'intéresse maintenant aux puissances de B.

a) En utilisant D matrice diagonale semblable à B, donner l'expression de B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que l'expression précédente de B^n obtenue pour $n \geq 0$ est valable pour les entiers négatifs.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, z_n est la fonction :

$z_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \dfrac{e^{int}}{n^2}$.

1) Justifier que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note Z sa somme.

2) Justifier que Z est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Z est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$.

Exercice 4

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique.

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2) Montrer que les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 3id)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A'^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire $A^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

Donner le terme général des suites (x_n) , (y_n), (z_n) telles que x_0, y_0 , z_0 sont donnés et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n \end{cases}$$

Exercice 6

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n^n}{2^n n!} z^n$.