PC

M. Roger

Devoir Maison n°14

pour le mercredi 03/03/2010

Ce devoir maison peut être cherché et rédigé à plusieurs. Au besoin, revoyez le chapitre sur les séries de Fourier pour traiter la partie I. Les résultats de la partie II peut être admis pour traiter la partie III

PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0,1[$, on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

-Pour tout $t \in [-\pi,\pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,

-La fonction φ_u est périodique de période 2π.

Soit $\frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u)\cos nt$ la série de Fourier de la fonction φ_u.

I.1 Calculer $a_n(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction φ_u est-elle égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ?

I.2 En déduire pour tout $u \in]0,1[$, l'égalité :

$$\frac{\pi \cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2}.$$

I.3 Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[0,1[$, et que la série de fonctions de terme général $u_n'(x)$ converge normalement sur tout segment $[0,a] \subset [0,1[$.

En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

I.4 Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \qquad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Nous noterons s sa limite.

I.4.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, avec $x \neq n$, on a

$$s_n(x+1) = \frac{x+n+1}{x-n} s_n(x).$$

En déduire que $s(x+1) = -s(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.4.3 Calculer $s(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}$.

PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!}x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k).$$

II.1 .

II.1.1 Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre entier naturel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(-p)$.

II.1.2 On suppose que x n'est pas un nombre entier négatif ou nul.
Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite non nulle (on pourra considérer la série de terme général $\ln\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir d'un certain rang N_x que l'on déterminera en fonction de x).
Nous noterons f la fonction $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = xf(x+1)$.
Calculer $f(1)$ et en déduire $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

III.1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ et montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$.

III.2.1 On pose $g_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du$. Déterminer une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x+1)$ et en déduire l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x et n.
En déduire que $G_n(x) = \dfrac{n}{(n+x)f_n(x)}$.

III.2.2 Montrer que pour tout $t \in [0,n]$ on a les inégalités $e^{-t} \geq \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ et
$e^t \geq \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$. En déduire que l'on a $0 \leq e^{-t} - \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1-\left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$ pour tout $t \in [0,n]$.

III.2.3 Montrer, par récurrence sur n, que l'on a $(1-a)^n \geq 1-na$ pour tout $a \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que pour tout $t \in [0,n]$ on a les inégalités :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Déduire de ce qui précède la limite, pour $x \in]0,+\infty[$, de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et exprimer $f(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

III.3 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.