

Ce devoir maison est volontairement très élémentaire : traitez au moins la totalité des exercices 1 et 2, et soignez la rédaction.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -3/4 & 2/3 & 1/3 \\ -3/4 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

- Calculer le polynôme caractéristique de A . En déduire que A admet trois valeurs propres distinctes que l'on précisera.
- Montrer que les vecteurs u, v, w de coordonnées respectives dans la base canonique $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$ et $(2, 1, 1)$ sont des vecteurs propres de A .
- Dites pourquoi (sans faire de calcul de déterminant) la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Expliciter une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
(on ne demande pas le calcul de P^{-1} , mais vous sauriez le faire, par la méthode du pivot, n'est-ce pas?)
- Application : Soient v_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans la base canonique un vecteur fixé, et (v_n) la suite de vecteurs de coordonnées respectives $((x_n, y_n, z_n))_n$ dans la base canonique, vérifiant pour tout $n \geq 0$ par la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$
 - En notant X'_0 le vecteur colonne correspondant à l'écriture dans la base \mathcal{B}' de v_0 , écrire une relation entre X'_0, X_0 et P .
 - Montrer que pour tout n , D^n est une matrice diagonale.
 - Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - Calculer A^n en fonction de n .
 - En déduire que les suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) admettent des limites que l'on précisera.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction v_n par : $v_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^n$. On note $I =]-1, 1[$.

- Vérifier que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge normalement sur tout segment de I . On note S sa somme. Donner l'expression de $S(t)$ pour tout $t \in I$.
- Calculer $\lim_{t \rightarrow -1} S(t)$.
 - Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 0} v_n(-1)$ diverge.
 - Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ ne converge pas normalement sur I .
N.B. : cet exemple illustre l'importance de l'hypothèse « CVN sur I » dans le théorème de la double limite...
- Soit $T : I \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \int_0^s S(t)dt$. Justifier que T est bien définie, et calculer $T(s)$ pour tout $s \in]-1, 1[$.
- Pour $s \in]-1, 1[$, exprimer $\ln(1-s)$ comme la somme d'une série convergente $\sum a_n$ dont le terme général a_n dépend de s^n .

La suite du devoir est facultative

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\cos(nt)}{n^3}$.

- Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . On notera S sa somme.
- Montrer que S est de classe C^1 sur \mathbb{R} . En déduire une expression sous forme de série de sa dérivée.
- Montrer que S est paire.
- Montrer que S est 2π -périodique.
- Exprimer $\int_0^{2\pi} S(t)dt$ sous la forme de la somme d'une série numérique.
- Montrer que pour tout t , $S(t)$ est la partie réelle de la somme de la série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{int}}{n^3}$.