

Ce devoir -plus difficile- est accompagné de nombreuses indications dans les deux premières parties. Les deux suivantes sont facultatives.

On dit qu'une suite réelle  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **ultimement périodique** lorsqu'elle est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  tels que :

$$(\mathcal{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n.$$

(L'entier  $p$  est une période de la suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$ ).

On note  $UP$  l'ensemble des suites ultimement périodiques de réels.

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés élémentaires de ces suites et le caractère ultimement périodique éventuel de suites simples.

## Partie I -

**I.A -** Montrer que  $UP$  est un sous espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites réelles. Est-il de dimension finie ?

*indic. : on pourra raisonner par l'absurde et montrer que s'il existait une base finie de  $UP$  de cardinal  $d$ , de suites respectivement  $p_1, \dots, p_d$ -périodiques a.p.c.r, alors  $P = \prod_{i=1}^d p_i$  serait une période de toute suite de  $UP$ .*

**I.B -** Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un élément de  $UP$  et  $\mathcal{P}(a)$  l'ensemble des entiers  $p \geq 1$  tels que la suite  $a$  admette  $p$  pour période à partir d'un certain rang.

**I.B.1)** Montrer qu'il existe un entier  $T \geq 1$  (que l'on appellera la période de  $a$ ) tel que :

$$\mathcal{P}(a) = \mathbb{N}^* T = \{kT, k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Que peut-on dire de la suite lorsque  $T = 1$  ?

*indic. : pour l'existence de  $T$ , on pourra utiliser le fait que toute partie non vide de  $\mathbb{N}^*$  admet un plus petit élément. On pourra ensuite faire la division euclidienne par  $T$  de tout élément de  $\mathcal{P}(a)$ .*

**I.B.2)** Montrer qu'il existe un plus petit entier  $n_0$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+T} = a_n.$$

Montrer que, pour tout  $p \in \mathcal{P}(a)$ ,  $n_0$  est le plus petit entier à partir duquel la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  devient  $p$ -périodique. Combien de paramètres réels suffisent à définir parfaitement  $a$  ?

*indic. : n'hésitez pas à construire au brouillon une suite explicite ultimement périodique avant de rédiger la preuve*

**I.C -** Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un élément de  $UP$ .

**I.C.1)** Montrer que  $a$  est bornée et que le rayon de convergence  $R_a$  de la série entière  $\sum a_n x^n$  est strictement positif. À quelle condition nécessaire et suffisante  $R_a$  est-il égal à  $+\infty$  ? Que vaut-il sinon ?

**I.C.2)** Montrer que la somme de cette série est une fraction rationnelle. Dans quel cas est-ce un polynôme ?

*indic. : on pourra "découper"  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{q=n_0}^{n_0+T-1} a_n x^{kT+q}$*

**I.D -** Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , dont la somme est la restriction à  $] -R, R[$  d'une fraction rationnelle.

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle ultimement périodique ?

## Partie II -

**II.A - Exemple 1**

On définit la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

et la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $a_n = 0$  si  $F_n$  est pair et  $a_n = 1$  sinon. La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle ultimement périodique ?

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum a_n x^n$ .

*indic. : écrivez les premiers termes des suites, avant de faire une récurrence*

**II.B - Exemple 2**

On définit maintenant la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = a_n \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = -a_n.$$

II.B.1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ . On note  $S$  sa somme.

II.B.2) Trouver une relation liant  $S(x)$  et  $S(x^2)$ .

En déduire que, pour tout  $x$ ,  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 - x^{(2^k)}).$$

II.B.3) Étudier, pour  $n$  donné dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{S(x)}{(1-x)^n} \right)$$

et en déduire que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas ultimement périodique.

### II.C - Exemple 3

Soit  $x = \frac{a}{b}$  un rationnel strictement positif, donné sous forme irréductible. On définit deux suites d'entiers  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

- $d_0 = E(x)$  (partie entière) et  $r_0$  est le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .
- pour tout  $n \geq 1$ ,  $r_n$  (resp.  $d_n$ ) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de  $10 \cdot r_{n-1}$  par  $b$ .

II.C.1) Dans cette question (uniquement),  $x = \frac{22}{7}$ . Déterminer  $d_0, d_1, \dots, d_{10}$ .

II.C.2) Montrer que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est ultimement périodique. Qu'en est-il de  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

II.C.3) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq d_n \leq 9$ .

II.C.4) Établir l'égalité :

$$x = E(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n 10^{-n}.$$

*indic. : on pourra montrer par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$  que  $x = E(x) + \sum_{n=1}^k d_n 10^{-n} + \frac{r_k}{10^k \cdot b}$ .*

## La suite du devoir est facultative

### Partie III -

Le but de cette partie est de montrer que le réel  $\pi$  n'est pas un élément de  $\mathbb{Q}$ .

$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même. Pour tout élément  $f$  de  $E$ , on note  $F$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

III.A - L'application de  $E$  qui à tout élément  $f$  associe  $F$  est notée  $L$ . Vérifier que  $L$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .

III.B - On considère dans cette question un élément  $f$  de  $E$  supposé borné sur  $\mathbb{R}$  et on note  $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

III.B.1) Montrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$|F(x)| \leq M \frac{x^2}{2}.$$

III.B.2) On définit une suite d'éléments de  $E$  par  $f_0 = f$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $f_{n+1} = L(f_n)$ .

Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \dots 2n} M.$$

III.B.3) Soit  $I$  un segment quelconque de  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout  $n$ ,  $f_n$  est bornée sur  $I$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{x \in I} |f_n(x)|) = 0$ .

III.C - On prend maintenant dans cette question et dans les suivantes  $f = \sin$ , et on considère la suite de fonctions définie comme dans la question précédente.

III.C.1) Déterminer les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .

III.C.2) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$f_{n+1}(x) = (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x).$$

III.D - Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $F_p$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des fonctions polynômes de degré au plus  $p$ .

III.D.1) On définit :

$$\begin{aligned} H : F_p \times F_p &\rightarrow F_p \times F_p \\ (P, Q) &\mapsto (P' - Q, P + Q') \end{aligned}$$

Vérifier que  $H$  est un automorphisme de  $F_p \times F_p$ .

III.D.2) On désigne par  $S$  l'ensemble des fonctions paires de  $F_p$ , par  $A$  celui des fonctions impaires.

Montrer que  $H(S \times A) = A \times S$ .

III.D.3) On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie dans la question III.C. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , il existe un couple unique de fonctions  $P_n$  et  $Q_n$  de  $F_n$ ,  $P_n$  paire et  $Q_n$  impaire, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x) \sin x + Q_n(x) \cos x.$$

Déterminer  $P_n$  et  $Q_n$  pour  $n = 0, 1, 2$ .

III.D.4) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_{n+1}(x) = (2n + 1)P_n(x) - x^2 P_{n-1}(x).$$

En déduire que les fonctions  $P_n$  sont des polynômes à coefficients entiers.

III.E - On suppose ici que le réel  $\pi$  est élément de  $\mathbb{Q}$ , ensemble des nombres rationnels.

Soit donc  $p$  élément de  $\mathbb{Z}$  et  $q$  élément de  $\mathbb{Z}$  tels que  $\pi = \frac{p}{q}$ .

III.E.1) Montrer que la suite

$$\left( (2q)^n P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?

III.E.2) En déduire que  $\pi$  n'est pas rationnel.

## Partie IV -

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $a_n = 1$  si  $\sin n > 0$ ,  $a_n = 0$  sinon.

Le but de cette partie est d'étudier si cette suite à valeurs entières est élément de  $UP$ .

IV.A - On suppose que cette suite est ultimement périodique.

IV.A.1) Montrer qu'il existe un entier  $N$  et un entier strictement positif  $T$  tels que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à  $N$ , le signe de  $\sin(kT)$  soit constant.

IV.A.2) En déduire que la suite  $(\cos(kT))_{k \in \mathbb{N}}$  est composée de réels strictement positifs à partir d'un certain rang.

IV.B - Soit  $G = \mathbb{Z}T + 2\pi\mathbb{Z} = \{nT + 2k\pi, (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

IV.B.1) Montrer que  $G$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$ . Existe-t-il  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $G = a\mathbb{Z}$  ?

IV.B.2) On pose  $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$  (ensemble des éléments strictement positifs de  $G$ ). Montrer que  $G^+$  possède une borne inférieure  $a$ .

IV.B.3) On suppose  $a \in G^+$ . Montrer que  $G = a\mathbb{Z}$ .

IV.B.4)  $a$  n'est donc pas élément de  $G^+$ . Supposant  $a > 0$ , montrer que l'on peut trouver deux éléments  $g$  et  $g'$  de  $G^+$  tels que  $a < g' < g < 2a$ . En déduire  $a = 0$ .

IV.C -

IV.C.1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $g_n \in G$  tel que  $0 < g_n < 10^{-n}$ .

IV.C.2) Soit  $x$  un réel.

Construire une suite d'éléments de  $G$  convergeant vers  $x$ .

IV.D -

IV.D.1) Montrer l'existence d'une suite d'entiers positifs  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la suite  $(\cos(k_n T))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $-\frac{1}{2}$ .

Montrer que l'ensemble  $\{\cos(k_n T), n \in \mathbb{N}\}$  des termes de cette suite n'est pas de cardinal fini.

IV.D.2) Construire alors une suite strictement croissante  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  extraite de  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la limite de  $(\cos(y_n T))_{n \in \mathbb{N}}$  soit  $-\frac{1}{2}$ .

IV.D.3) La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle ultimement périodique ?