PC

M. Roger

Devoir Maison n°9

pour le jeudi 17/12/2009

Répondez par V (vrai) ou F(faux)

Si votre réponse est V citez le nom du résultat de cours utilisé ou bien l'énoncé de la propriété employée.

Si votre réponse est F, donnez un contre-exemple

Question 1 Si A est une matrice carrée de taille n dont la somme des multiplicités des valeurs propres est n, alors A est diagonalisable.

Question 2 Si A est une matrice carrée de taille n dont la somme des dimensions des sous-espaces propres est n, alors A est diagonalisable.

Question 3 Dans E e.v.n. , soient F et G des s.e.v. Si $F \perp G$, alors F et G sont supplémentaires.

Question 4 En dimension finie, si p et q sont deux projecteurs ayant la même trace, alors il existe un isomorphisme de $\operatorname{Im} p$ sur $\operatorname{Im} q$

Question 5 Dans $E = \mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $v \in E$. On a $(v^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$.

Question 6 Si A et B sont deux matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ayant le même polynôme caractéristique, alors elles sont semblables.

Question 7 Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, $P(k) = \cos(k\pi)$.

Question 8 Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, $P(\cos(k\pi)) = k$.

Question 9 Dans un espace vectoriel de dimension 3, toute intersection de deux hyperplans est une droite vectorielle.

Question 10 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n u_n$ converge.

Question 11 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, alors $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge.

Question 12 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 u_n = 0$, alors $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge.

Question 13 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+u^3} \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-u)^{3n}}{2^n} \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{(3n+1)2^n}$.

Question 14 Si la série de fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur un segment I, alors sa somme S est continue sur I.

Question 15 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi, \pi]$ telle que $f(\pi) = 0$, alors f est la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Question 16 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi, \pi]$ telle que $f(\pi) = 0$, alors f' est la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Question 17 Soient $R > 0$ Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ développables en en séries entières sur $]-R, R[$ avec (a_n) et (b_n) telles que pour tout $t \in]-R, R[$ $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors la fonction fg est développable en série entière sur $]-R, R[$, et pour tout $t \in]-R, R[$, $f(t)g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n t^n$

Question 18 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ une fonction continue. Il existe un élément $(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$ tel que $f(x_0, y_0) = \inf\{f(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Question 19 L'application $\mathcal{F} : \mathcal{C}^2_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui à une fonction associe la suite de ses coefficients de Fourier complexes est injective.

Question 20 Si f est développable en série entière en 0 (i.e. sur un voisinage ouvert contenant 0), alors f admet un développement limité d'ordre k en 0 pour tout $k \in \mathbb{N}$.