PC

M. Roger

Corrigé DM n°9

pour le jeudi 17/12/2009

Question 1 Si A est une matrice carrée de taille n dont la somme des multiplicités des valeurs propres est n, alors A est diagonalisable.

F : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Question 2 Si A est une matrice carrée de taille n dont la somme des dimensions des sous-espaces propres est n, alors A est diagonalisable.

V : A est diagonalisable ssi $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim E_{\lambda,A} = \dim E$.

Question 3 Dans E e.v.n. , soient F et G des s.e.v.Si $F \perp G$, alors F et G sont supplémentaires.

F : $E = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}\overrightarrow{i} \perp \mathbb{R}\overrightarrow{j}$, et $E \neq \mathbb{R}\overrightarrow{i} \oplus \mathbb{R}\overrightarrow{j}$

Question 4 En dimension finie, si p et q sont deux projecteurs ayant la même trace, alors il existe un isomorphisme de $\operatorname{Im} p$ sur $\operatorname{Im} q$

V : Soit $r = \operatorname{Tr} p = \operatorname{Tr} q = \operatorname{rg} p = \operatorname{rg} q$, $(e_1, \dots e_r, e_{r+1}, \dots e_n)$ (resp. $(f_1, \dots f_r, f_{r+1}, \dots f_n)$) une base de E adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ (resp. $E = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q$). L'application linéaire u telle que $u(e_i) = f_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ est un isomorphisme, ainsi que $u\Big|_{\operatorname{Im} p}^{\operatorname{Im} q}$.

Question 5 Dans $E = \mathbb{R}^n$, pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $v \in E$. On a $(v^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$.

V : On est en dimension finie, donc $((\mathbb{R}v)^\perp)^\perp = \mathbb{R}v$, et $(\mathbb{R}v)^\perp = v^\perp$.

Question 6 Si A et B sont deux matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ayant le même polynôme caractéristique, alors elles sont semblables.

V : A et B ont le même polynôme caractéristique et sont diagonalisables donc les mêmes valeurs propres et les sous-espaces propres correspondants ont les mêmes multiplicités. Elles sont donc semblables à une même matrice diagonale.

Question 7 Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, $P(k) = \cos(k\pi)$.

V : la famille $(a_i)_{0 \leq i \leq 3} = (1, 2, 3, 4)$ est constituée d'éléments deux à deux distincts, donc pour $(b_i)_{0 \leq i \leq 3} = (\cos((i+1)\pi))$, donc d'après le théorème d'interpolationde Lagrange, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(a_i) = b_i, \ \forall 0 \leq i \leq 3$.

Question 8 Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, $P(\cos(k\pi)) = k$.

F : $\cos(1 \times \pi) = -1 = \cos(3 \times \pi)$, donc aucune fonction (a fortiori polynôme) ne peut vérifier $P(-1) = 1 = 3$

Question 9 Dans un espace vectoriel de dimension 3, toute intersection de deux hyperplans est une droite vectorielle.

F : prendre H un hyperplan, et considérer $H = H \cap H$

Question 10 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, alors la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ converge.

F : considérer $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Question 11 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

F : considérer $u_n = -1$

Question 12 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\lim_{n \to +\infty} n^5 u_n = 0$, alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

V : $u_n = O(1/n^2)$ théorème de comparaison

$\boxed{\textbf{Question 13}}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+u^3}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-u)^{3n}}{2^n}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{(3n+1)2^n}$.

F : l'égalité de gauche découle thé intégration t. à t. avec CVN, en remarquant que $\dfrac{1}{2+u^3} = \dfrac{1}{2(1-u^3/2)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-u^3/2)^n$. En revanche, l'intégration est fausse : $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-u)^{3n}}{2^n}\mathrm{d}u = -\frac{(-1)^{3n+1}-0^{3n+1}}{(3n+1)2^n}$

$\boxed{\textbf{Question 14}}$ Si la série de fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur un segment I, alors sa somme S est continue sur I.

F : il manque l'hypothèse de continuité... Par exemple $u_n : x \mapsto 0$ si $x \in [0,1]$, $\dfrac{x}{n^2}$ si $x \in [1,2]$

$\boxed{\textbf{Question 15}}$ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi,\pi]$ telle que $f(\pi)=0$, alors f est la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

V : En particulier f vérifie le théorème de convergence normale ($\mathcal{C}^0$, 2π-pé, $\mathcal{C}M^1$), ou bien le théorème de Dirichlet ($\mathcal{C}M^0$, 2π-pé, $\mathcal{C}M^1$, et f est égale à sa régularisée car f continue).

$\boxed{\textbf{Question 16}}$ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi,\pi]$ telle que $f(\pi)=0$, alors f' est la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

V : f' est $\mathcal{C}^1$ et 2π périodique : on peut lui appliquer le théorème de convergence normale de sa série de Fourier.

$\boxed{\textbf{Question 17}}$ Soient $R>0$ Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ développables en en séries entières sur $]-R,R[$ avec (a_n) et (b_n) telles que pour tout $t \in]-R,R[$ $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, alors la fonction fg est développable en série entière sur $]-R,R[$, et pour tout $t \in]-R,R[$, $f(t)g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n t^n$

F : la formule finale est fausse (utiliser un produit de Cauchy pour $f(t)g(t)$), ex : $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $b_n = \delta_0^n$: $e^t \times 1 \neq 1$...

$\boxed{\textbf{Question 18}}$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ une fonction continue. Il existe un élément $(x_0,y_0) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$ tel que $f(x_0,y_0) = \inf\{f(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$.

V : f est continue sur le disque unité fermé qui est compact, donc y atteint son minimum.

$\boxed{\textbf{Question 19}}$ L'application $\mathcal{F} : \mathcal{C}^2_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ qui à une fonction associe la suite de ses coefficients de Fourier complexes est injective.

V : $\mathcal{C}^2_{2\pi} \subset \mathcal{C}^0_{2\pi}$, et $\mathcal{F} : \mathcal{C}^0_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est injective

$\boxed{\textbf{Question 20}}$ Si f est développable en série entière en 0 (i.e. sur un voisinage ouvert contenant 0), alors f admet un développement limité d'ordre k en 0 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

V : Si f est DSE sur un intervalle $]-r,r[$, pour $r>0$, alors elle est développable en série de Taylor en 0, donc admet un développement limité à tout ordre.