

Chapitre 19 : **Etude métriques des courbes**

## I. Applications directes du cours

### Exercice 1

On considère le rectangle  $\mathcal{R}$  de sommets  $A(0, 2)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(2, -2)$  et  $D(0, -2)$ .

- 1) Calculer l'aire de  $\mathcal{R}$  à l'aide du théorème de Fubini.
- 2) Calculer l'aire de  $\mathcal{R}$  à l'aide de la formule de Green-Riemann.

## II. Exercices

### Exercice 2

Calculer la longueur de l'arc paramétré par :  $x = \frac{\cos(at)}{\operatorname{ch} t}$ ,  $y = \frac{\sin(at)}{\operatorname{ch} t}$ , avec  $a > 0$  fixé.

### Exercice 3

On considère l'arc de  $\mathbb{R}^2$  défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \\ y(t) = 2 \operatorname{ch} t \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'abscisse curviligne  $t \mapsto s(t)$ .
- 2) Déterminer le rayon de courbure en  $M$  de paramètre  $t_0$ .

## III. Pour aller plus loin

### Exercice 4

Déterminer le minimum du rayon de courbure de l'arc d'équation  $y = e^x$ .

## IV. Un sujet (partiel) d'écrit de concours

### Problème 1

E3A PSI 2009

Rappels.

Soit  $I = [a, b]$  (avec  $a < b$ ) un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

On considère  $V : (x, y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$  un champ de vecteurs et  $\gamma$  un arc orienté plan de paramétrage :  $t \in I \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , de classe  $C^1$  par morceaux sur  $I$ , parcouru dans le sens des  $t$  croissants.

On rappelle que la circulation de  $V$  le long de  $\gamma$ , notée  $\int_{\gamma} V$  se calcule par la formule

$$\int_{\gamma} V = \int_{\gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

On suppose  $P$  et  $Q$  de classe  $C^1$  sur  $U$ . L'arc  $\gamma$  est supposé fermé, sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique. Il délimite un domaine  $G$  d'un seul tenant, inclus dans  $U$ .

On rappelle la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\gamma} V = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

1. Dans cette question seulement, on prend  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2 \text{ et } y^2 \leq x\}$  et pour  $\gamma$  l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.

1.1. Représenter le domaine  $G$  et  $\gamma$ .

1.2. Calculer directement, en paramétrant l'arc :  $\int_{\gamma} V$  avec

$$P : (x, y) \mapsto 2xy - x^2 \text{ et } Q : (x, y) \mapsto x + y^2$$

1.3. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.

2. On suppose que les deux fonctions  $P$  et  $Q$  vérifient : pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ .

2.1. Que vaut  $\int_{\gamma} V$  ?

2.2. Donner un exemple de champ de vecteur  $V$ , non identiquement nul, et vérifiant la propriété :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

3.

3.1. Démontrer que les intégrales curvilignes suivantes :  $A_1 = \int_{\gamma} x dy$ ,  $A_2 = - \int_{\gamma} y dx$  et  $A_3 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx)$  sont égales. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3.2. Représenter graphiquement l'arc orienté  $\gamma$  d'équations paramétriques

$$t \in [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{pmatrix}$$

dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  direct.

On précisera les tangentes aux points singuliers.

3.3. Déterminer l'aire délimitée par la courbe  $\gamma$ .