Chapitre 11 : **Equations différentielles linéaires**

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Résoudre le système différentiel d'inconnue $(x, y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2$:

$$(S) \ : \ \begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= y \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.

2) Soient $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$

3) Résoudre le système différentiel

$$(S) \ : \ \begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Résoudre $X' = AX$, avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ dérivable.

II. Exercices

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle :

$(E) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2$, d'inconnue $y :]0, 1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $I =]0, 1[$

(remarquer que $x \mapsto x$ est une solution particulière de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur I)

Exercice 5

Soit $I =]-1, 1[$. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$\forall x \in I, \ f'(x)f(-x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

(procéder par analyse-synthèse)

III. Pour aller plus loin

Exercice 6

On considère l'équation différentielle :

$xy' - 2|y| = x \quad (E)$.

1) Résoudre les équations différentielles :

$(E_1) \ : \ xy' - 2y = x$

$(E_1) \ : \ xy' + 2y = x$

2) Montrer que (E) n'a pas de solution réelle. *(on pourra raisonner par l'absurde en calculant $f(0)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}_*^+$)*

3) Intégrer (E) sur $\mathbb{R}_*^+$.

(procéder par analyse-synthèse)

4) Intégrer (E) sur $\mathbb{R}_*^-$.

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle :

$x'' + (4e^t - 1)x' + 4e^{2t}x = 0$

(on pourra poser $u : t \mapsto e^t$ et poser $x(t) = y(u(t))$, $x'(t) = y'(u(t))\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, et $x''(t) = y''(u(t))\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2 + y'(u(t))\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$)

Exercice 8

Résoudre l'équation différentielle :

$x'' + x' - 2e^{-2t}x = \operatorname{ch} t + 3 \operatorname{sh} t$

(on pourra faire le changement de variable $u = e^{-t}$)

Exercice 9

Intégrer l'équation différentielle :

$x^3y'' - 2xy + 3 = 0$.

(on pourra poser $z = xy' + y$)