Chapitre 16 :

Equations différentielles non linéaires, E.D.P.

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle "incomplète" d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$:

$$y' = 1 - y^2$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle à variable séparables d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$:

$$y^2 y' = 1 + x^3$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle à variable séparables d'inconnue $y : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$:

$$y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{x}$$

Exercice 4

Représenter la trajectoire associée au système différentiel

$$(S)\ \begin{cases} x' = x + 1 & (1) \\ y' = x & (2) \end{cases}$$

passant par le point $A = (1, 0)$ à l'instant $t = 0$.

II. Exercices

Exercice 5

On considère le champ de vecteurs défini par

$$(C)\ \begin{cases} x' = y & (1) \\ y' = -x & (2) \end{cases}$$

1) En posant $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ pour des fonctions $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, exprimer $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de ρ, θ, $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

2)Même question pour $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

3) En déduire l'ensemble $\mathcal{L}$ des solutions de (C).

Exercice 6

1) Justifier que le système différentiel

$$(S)\ \begin{cases} x' = tx + (1-t^2)y & (1) \\ y' = x - ty & (2) \end{cases}$$

admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfaisant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que si X est une solution de (S), alors x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3) En dérivant (2), montrer que y est solution de l'équation différentielle : $(H)\ y'' = 0$

4) En déduire l'ensemble $\mathcal{L}$ des solutions de (S).

Exercice 7

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$, on cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de A vers $\mathbb{R}$ telles que pour tout (x, y) de A, l'équation aux dérivées partielles suivante soit vérifiée :

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,\cdot) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,\cdot) = 0.$$

a) Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifier que $\varphi : A \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = g(y/x)$ est solution de (E) ;

b) Démontrer que si f vérifie (E) alors $f(u, uv)$ ne dépend que de v ;

c) conclure.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle :
$y' - y - y^2 = 0 \quad (E)$.

1) Déterminer toutes les solutions (y, I) de E telles que : $y(x) \neq 0,\ f = \forall x \in I$.

on pourra montrer que $z : x \mapsto \frac{1}{y(x)}$ *vérifie une équation différentielle linéaire*

2) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que le problème de Cauchy (E) et $y(x_0) = y_0$ possède une unique solution maximale.

3) Traiter le cas $y_0 = 0$.

4) Lorsque $y_0 \neq 0$, montrer que y a une expression (sur I) de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{-1 + \lambda(y_0)e^-x}$, avec $\lambda(y_0) = \dfrac{1 + y_0}{y_0}$

5) Etudier $\varphi : z \mapsto \dfrac{z}{1+z}$, en déduire le signe de $\lambda(y_0)$ en fonction de y_0

6) Donner toutes les solutions maximales de (E), et représenter l'allure des courbes intégrales.

distinguer les cas (x_0, y_0) *dans* $]-\infty, \ln(y_0)[\times\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}\times\{0\}$, $\mathbb{R}\times]-1, 0[$, *ou* $]\ln(y_0), +\infty[\times] - \infty, -1[$

III. Pour aller plus loin

Exercice 9

(Equation de la chaleur)

On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{C})\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

d'inconnue $f : \begin{array}{ll} [0,1]\times\mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto f(x,t) \end{array}$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec les conditions initiales : $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} & f(0,t) = f(1,t) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R} & f(0,t) = f(1,t) = 0 \end{cases}$

1) Dans le cas d'un régime stationnaire (f ne dépend pas de t), résoudre $(\mathcal{C})$.

2) On admet dans la suite que f peut s'écrire sous la forme $f : (x,t) \mapsto g(x)h(t)$, avec $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

a) (analyse)Soit f une telle solution. Montrer qu'il existe un réel λ tel que : $\begin{cases} \forall t \in [0,1] & f''(x) = \lambda f(x) \\ \forall x \in \mathbb{R} & g'(t) = \lambda g(t) \end{cases}$

b) Dans le cas $\lambda = 0$, montrer que fg est nulle.

c) Dans le cas $\lambda > 0$, montrer que fg est nulle.

d) Dans le cas $\lambda < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-\lambda}$. On définit une fonction impaire, encore notée f, en posant $f(-t) = -f(t),\ \forall t \in [0,1]$. Montrer que f est de la forme $x \mapsto b sin(\omega x) \quad (\star)$, pour un certain b réel. Montrer qu'alors g est de la forme $t \mapsto e^{-\omega^2 t}$.

e) On étend la fonction f en une fontion 2-périodique, et que la relation $(\star)$ doit rester vérifiée sur $\mathbb{R}$. Montrer que nécessairement, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = n\pi := \omega_n$ et $\lambda = -n^2\pi^2 := \lambda_n$.

f) En déduire que toute fonction de la forme $F_n : (x,t) \mapsto b_n e^{-n^2\pi^2 t} sin(n\pi x)$, pour $b_n \in \mathbb{R}$ est solution de $\mathcal{C}$, impaire et 2-périodique par rapport à t.

3) synthèse partielle : en remarquant que l'ensemble des solutions de $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel, montrer que pour toute suite $(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{n\geq 1} |b_n|$ converge, la fonction F : $(x,t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} sin(n\pi x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]\times\mathbb{R}$ et solution de $(\mathcal{C})$.

4) Remarquer que $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(n\pi x)$