Chapitre 7 :

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans chacun des cas suivants, dites si l'expression proposée de $(x;y)$, pour tous vecteurs $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ appartenants à $\mathbb{R}^n$ défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

a) $(x;y)=x_1y_1$; b) $(x;y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$;

c) $(x;y)=(\sum_{i=1}^n x_i^2y_i^2)^{1/4}$;

Exercice 2

a) Vérifier que $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall\ (P,Q)\in\mathbb{R}[X], (P|Q)=\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En notant $\|\cdot\|$ la norme associée, calculer $\|1\|$, $\|X\|$, $\|X^2\|$, $\|X^3\|$.

Exercice 3

Sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ des applications continues de $[-\pi,\pi]$ vers $\mathbb{C}$ démontrer que $(f|g)=\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire hermitien (semi-linéaire à gauche) et que $(t\mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale.

Exercice 4

Vérifier que $(\cdot|\cdot) : \mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}$ définie par : $\forall\ P,Q\in\mathbb{R}[X], (P|Q)=\int_{-1}^1\overline{P(t)}Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire hermitien (semi-linéaire à gauche) sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5

soit a un vecteur non nul d'un espace préhilbertien réel ou complexe E et H l'orthogonal de $\{a\}$, déterminer la projection orthogonale de tout vecteur x de E sur $\mathbb{K}a$ et celle sur H en fonction de x, a et de leur produit scalaire, donner la distance de x à $\mathbb{K}a$ et celle de x à H.

(on pourra s'aider d'un dessin)

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}^4$ soit $F=\{(x,y,z,t);\ x-y+z-t=y-t=0\}$ déterminer $F^\perp$ et la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 7

Sur $\mathbb{R}^3$ soit $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ ((a,b,c),(x,y,z))\mapsto ax+2by+6cz+ay+bx-2bz-2cy-az-cx$

a) φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

b) si oui donner une base orthonormale pour φ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8

Sur $\mathbb{C}^3$ soit $\varphi:\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}$ définie par

$\varphi:((a,b,c),(x,y,z))\longmapsto$

$ax+2by+10cz+\mathbf{i}ay-\mathbf{i}bx-(2+\mathbf{i})bz-(2-\mathbf{i})cy-az-cx.$

1. φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{C}^3$?
2. si oui donner une base orthonormale pour φ dans $\mathbb{C}^3$.

Exercice 9

On rappelle que les normes N_1,N_2,N_∞ sur $\mathbb{R}^3$ sont définies pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ par les expressions : $N_2(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $N_1(x)=|x_1|+|x_2|+|x_3|$ et $N_\infty(x)=\max_{1\le i\le 3}|x_i|$

1) Dessiner les ensembles :

$D_1=\left\{x\in\mathbb{R}^3,\ N_1(x)\le 1\right\}$,

$D_2=\left\{x\in\mathbb{R}^3,\ N_2(x)\le 1\right\}$ et

$D_\infty=\left\{x\in\mathbb{R}^3,\ N_\infty(x)\le 1\right\}$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^3$, on a :

$N_\infty(x)\le N_2(x)\le\sqrt{3}N_\infty(x)$, et

$N_\infty(x)\le N_1(x)\le 3N_\infty(x)$

Exercice 10

Soit E un e.v. hermitien. Montrer que :

$\forall x,y\in E,\ <x;y>=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^3\mathbf{i}^{-k}\|x+\mathbf{i}^ky\|^2.$

II. Exercices

Exercice 11

Soit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à coefficients complexes. A tout $A = (a_{ij})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ on associe $N(A) = [\sum_{i=1..n}\sum_{j=1..n} |a_{ij}|^2]^{1/2}$

a) Démontrer que N est une norme hermitienne (i.e. associée à un p.s. hermitien) sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$;

b) Prouver que $\forall (A,B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $N(A)N(B) \geq N(AB)$ et que $|\operatorname{tr}(AB)| \leq N(A).N(B)$.

Exercice 12

Soit S_2 l'ensemble des suites complexes $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, telles que la série $\sum |u_n|^2$ converge. A tout (u,v) de $S_2 \times S_2$ on associe $< u|v >= \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$.

1. justifier l'écriture et prouver que S_2 muni de $< \cdot|\cdot >$ est un espace préhilbertien
2. Soit F la partie de S_2 formées des suites dont le nombre de termes non nuls est fini ; démontrer que $F^\perp$ est réduit à la suite nulle.
3. Comparer F et $(F^\perp)^\perp$. F est-il de dimension finie ?

Exercice 13

Soient E un espace euclidien, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Prouver que :

a) $F \subset G \Leftrightarrow G^\perp \subset F^\perp$;

b) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;

c)$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 14

Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien E, prouver que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) p est un projecteur orthogonal

ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$;

iii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

(pour montrer iii $\Rightarrow$ i), on pourra se donner $(x,y) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$, et appliquer iii) au vecteur $\lambda x + y$)

Exercice 15

(utilise l'exercice précédent)

Soient p, q deux projecteurs orthogonaux de $(E, \| \ \|)$, tels que $p \circ q$ est un projecteur de E.

1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteurs orthogonal.

2) En déduire que $p \circ q = q \circ p$.

Exercice 16

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels ;

1. Démontrer que $(P;Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$;

2. On note $L_n(X) = [X^n(1-X)^n]^{(n)}$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de $X^n(1-X)^n$) démontrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$

3. Calculer $< L_n|L_n >$.

Exercice 17

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, soit F le sous-espace engendré par $r = (1,1,2,0)$, $s = (2,1,3,1)$, $u = (0,1,1,-1)$, $v = (1,-2,-1,3)$; donnez un système d'équations de $F^\perp$ et de F, une base orthonormale de $F^\perp$ et de F ; donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.

III. Pour aller plus loin

Exercice 18

On note $E = \mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions réelles à valeurs réelles continues et 2π-périodiques.

1. Vérifier que $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\ (f,g) \in E^2, (f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n : t \mapsto \cos(nt)$ et $v_n : t \mapsto \sin(nt)$. Calculer (u_p, u_q), (u_p, v_q), et (v_p, v_q) pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. En déduire que la famille $\mathcal{F} = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{v_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale.
3. E peut-il être de dimension finie ?
4. Soit $f \in E$. Calculer $(f|u_0)$ et en déduire le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{Vect}(u_0)$.
5. Soit f une fonction impaire de E. Calculer $(f|u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit f une fonction paire de E. Calculer $(f|v_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19

Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (1 - a\cos t - b\sin t)^2 \mathrm{d}t \right\}$

(on pourra déterminer le projeté orthogonal -pour un produit scalaire adapté- de la fonction constante égale à 1 sur le plan $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ *)*

Exercice 20

Soit E un espace vectoriel euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$\forall (x,y) \in E^2, < x|y >= 0 \Rightarrow < f(x)|f(y) >= 0$; prouver que $\exists k \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall x \in E, ||f(x)|| = k||x||$

Exercice 21

Les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_2$ sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 22

Soient φ et ψ deux produits scalaires sur un même espace vectoriel E euclidien. Démontrer que si : $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \psi(x,y) = 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\varphi = \alpha\psi$.

on pourra considérer une b.o.n. $(e_1, \dots, e_n)$

Exercice 23

Soit q une application d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vers $\mathbb{R}$ telle que :

$(*)\quad \forall (x,y) \in E^2,\ q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$

1) Pour tout $(x,y) \in E^2$, on note

$\varphi(x,y) = \dfrac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$.

i) Montrer que $q(0) = 0$;

ii) En déduire que $q(-y) = q(y),\ \forall y \in E$;

iii) En déduire que φ est symétrique ;

iv) Montrer que $\varphi(0,y) = 0,\ \forall y \in E \quad (1)$

2) Prouver que :

$\forall (x,y,z) \in E^3$,

$\varphi(x+y,z) + \varphi(x-y,z) = 2\varphi(x,z) \quad (2)$;

3)

i) Déduire de (1) et (2) que pour tous $p \in \mathbb{Z}$, $x, z \in E$, $\varphi(px,z) = p\varphi(x,z)$

ii) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $x, z \in E$, $\varphi(\dfrac{p}{q}x, z) = \dfrac{p}{q}\varphi(x,z)$

4) On suppose de plus que $t \mapsto q(tx+y)$ est continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que φ est bilinéaire.

5) Démontrer que si $||\cdot||$ est une norme sur E et si $||\cdot||^2$ vérifie $(*)$ alors $||\cdot||$ est une norme euclidienne.