Chapitre 9 : Suites dans un espace vectoriel normé

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$N(x,y) = \sup(|x+y|, |x|, |y|)$ est une norme, puis dessiner la boule unité fermée .

Exercice 2

Démontrer que sur $\mathbb{R}^2$, l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$N(x,y) = \sup(|x+ty|, t \in [0,1])$ est une norme, dessiner la boule unité fermée pour la distance associée.

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$; démontrer que
$N : E \to \mathbb{R},\ f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| \mathrm{d}t$ est une norme

Exercice 4

Soit f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$ et. si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^4)$; prouver que f est bornée non continue en $(0,0)$ et que sa restriction à toute droite de $\mathbb{R}^2$ est continue.

Exercice 5

Soit f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{y^2 + x^4}$.
Démontrer que f est continue en $(0,0)$

II. Exercices

Exercice 6

a) Sur $\mathbb{C}_n[X]$ on définit N par : pour tout P de $\mathbb{C}_n[X]$, $N(P) = |P(0)| + |P^{(1)}| + ... + |P^{(n)}(n)|$, démontrer que N est une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$;
b) Soit $(a_k)_{0 \le k \le q} \in \mathbb{C}^{q+1}$. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $T(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|$, à quelle condition sur $(a_k)_{0 \le k \le q}$ T est-elle une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$?

Exercice 7

Sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on définit
$N(M) = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |M_{ij}|$ pour $M = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$;
a) démontrer que c'est une norme vérifiant pour tous M et M' de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:
$||MM'|| \le ||M|| ||M'||$;
b) $\mathrm{tr}(M)$ désignant la trace de M, déterminer
$|||\mathrm{tr}||| = \sup\{|\mathrm{tr}(M)| / ||M|| = 1\}$.
c) mêmes questions avec
$N(M) = \sup_{1 \le i,j \le n} |M_{ij}|$.

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{R}$-e. v. n., a et b deux vecteurs non nuls de E, et pour tout t réel, $f(t) = ||at + b||$;
a) prouver que f est continue et lipschitzienne ;
b) prouver que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim_{-\infty} f = +\infty$;
c) Prouver que l'ensemble des réels t tels que $at + b$ appartienne à la boule unité ouverte est soit vide soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit E, $\mathbb{R}$-e. v. n. prouver que :
a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ si A est ouvert (resp. fermé, resp. compact) alors αA est ouvert (resp. fermé, resp. compact).
b) Si A et B sont deux parties de E ouvertes alors $A + B$ est ouvert.
c) Dans $\mathbb{R}$ considérer la somme $\mathbb{Z} + x\mathbb{Z}$, pour x irrationnel, pour illustrer le fait que la somme de deux fermés peut ne pas être un fermé.

Exercice 10

Sur $\mathbb{C}$ soient
$E = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < 1\}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
$F = \{z \in \mathbb{C} / |z| > 1\}$,
$H = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < 2\}$, et
$f : z \mapsto 1 + \dfrac{1}{|z|}$ et $g : z \mapsto \dfrac{1}{z}$.
Prouver que f et g sont continues sur G, déterminer les images par f et par g de G, F et H. En déduire des bijections continues de G vers F, de F vers E et de E vers H, définir leurs bijections réciproques.

Exercice 11

Soit d une distance sur $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^p$, on appelle distance de a à B le nombre
$d(a,B) = \inf\{d(a,y);\ y \in B\}$. Justifier que :
a) $d(a,B)$ existe ;
b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, y_n \in B$, $d(a, y_n) \le d(a,B) + 1/n$;
c) si B est compact alors
$\exists b \in B$, $d(a,B) = d(a,b)$;
d) si B est borné alors $\exists b \in \mathbb{R}^p$, $d(a,B) = d(a,b)$;
e) si B est fermé alors : $\exists b \in B$, $d(a,B) = d(a,b)$;
f) Dans $\mathbb{R}^2$, $a = (0,1)$, $B = \{1\} \times [-1, 1[$, trouver b pour les normes 1, 2, infinies.

III. Pour aller plus loin

Exercice 12

Soient $p > 1$ et $q > 1$ deux réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) En utilisant la concavité d'une fonction adéquate, montrer que : $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $\|y\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

2) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, établir $\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{|x_i|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|y\|_q^q}$. En déduire $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

3) En écrivant
$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$, montrer que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

4) Conclure que $\|\ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p$.

Exercice 13

Soit E et F deux espaces vectoriels normés réels et g une application de E vers F telle que pour tout (x,y) de E^2, $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Démontrer que :

a) si g est continue en 0 alors g est linéaire ;

b) si g est bornée sur $B_f(0_E, 1)$ alors g est linéaire.

Exercice 14

Soit S_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées dont le premier terme est nul, pour $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit les applications

$N_\infty : U \mapsto \sup(|u_n|\ n \in \mathbb{N})$ et

$N : U \mapsto \sup(|u_{n+1} - u_n|;\ n \in \mathbb{N})$;

a) Prouver que N_∞ et N sont des normes sur S_0 ;

b) Prouver que pour tout U de S_0,
$N(U) \leq 2N_\infty(U)$.

Trouver U non nulle de S_0 telle que
$N(U) = 2N_\infty(U)$.

N_∞ et N sont -elles équivalentes ?

Exercice 15

Soit $(E, \|\ \|)$ un e. v. n. , démontrer que pour tous a, b, c de E tels que $a + b + c = 0$:

$2(\|a-b\| + \|c-a\| + \|b-c\|) \geq 3(\|a\| + \|b\| + \|c\|)$

Exercice 16

soit A partie compacte de E, espace vectoriel normé, prouver que $\bigcup_{x,y\in A} [x,y]$ est une partie compacte de E où $[x,y] = \{x + ty, t \in [0,1]\}$.

Exercice 17

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, muni de la norme : $\|\ \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f(t)|dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, vérifiant : $f_n(0) = n$, $\forall t \in]0,1], f_n(t) = \min(n, \frac{1}{\sqrt{t}})$, démontrer que f_n appartient à E, la suite (f_n) converge-t-elle ? Prouver que :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > K$ et $q > K$, $\|f_p - f_q\|_1 < \varepsilon$.

Exercice 18

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. La suite complexe $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette suite prenne une infinité de valeurs ; lorsque cette condition est réalisée démontrer que tout arc du cercle trigonométrique contient au moins un point de cette suite.

Exercice 19

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\|\ \|$ une norme sur E. Soit $h : E \to E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$\forall (x,y) \in E^2,\ \|h(x) - h(y)\| \leq \|x-y\|^\alpha$. Montrer que h est continue sur E.

Exercice 20

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\|\ \|$ une norme sur E. Soit $f : E \to E$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$ et $a \in E$ vérifiant :

$f(a) = a$;

$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$.

Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Vrai ou faux

1. Si N et $\tilde{N}$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^3$, alors il existe $K > 0$ tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ K^{-1}N(x) \leq \tilde{N}(x) \leq KN(x)$.
2. Il n'existe pas de partie de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverte et fermée.
3. Une réunion infinie de compacts est compacte.
4. les seuls ouverts de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.