Chapitre 12 :

Réduction des endomorphismes symétriques

I. Applications directes du cours

Exercice 1

E espace euclidien de base orthonormale directe (i, j, k) soit s_1, s_2, s_3 les symétries orthogonales (demi-tours) d'axes respectifs dirigés par $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, déterminer $r = s_1 \circ s_2 \circ s_3$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$, étudier les formes quadratiques q de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Vrai ou faux : si P est une matrice orthogonale, alors P est inversible, et le calcul de P^{-1} ne nécessite aucun calcul (avec $+$, $\times$).

Exercice 4

Donner la nature et les éléments caractéristiques des coniques d'équation dans un plan affine euclidien :

a) $x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$;
b) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$;
c) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 5x + 9y - 10 = 0$;

Exercice 5

Donner l'allure des ensembles :

$E_1 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3;\ X^2 + Y^2 + 4Z^2 = 1\}$
$E_2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3;\ X^2 - Y^2 + 4Z^2 = 1\}$
$E_3 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3;\ X^2 + Y^2 + 4Z^2 = -1\}$

II. Exercices

Exercice 6

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace vectoriel E , démontrer que :
$p \circ q = 0 \Leftrightarrow q \circ p = 0$.

Exercice 7

E espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, R la rotation dirigé par un vecteur unitaire u et d'angle θ, démontrer que pour toute rotation ρ de E , $\rho \circ R \circ \rho^{-1}$ est la rotation d'axe dirigé par $\rho(u)$ et d'angle θ.

Exercice 8

Soit E espace euclidien orienté de dimension 3, u vecteur normé, α, β, γ trois réels ; donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f de E vers E, $x \mapsto \alpha x + \beta (u|x) u + \gamma\, u \wedge x$ soit une rotation

Exercice 9

Caractériser les endomorphismes de E espace euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans une base orthonormale directe est :

a) $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 10

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont réels.

Montrer que M est une matrice de rotation ssi a, b, c sont les trois racines (distinctes ou non) de l'équation $x^3 - x^2 + k = 0$, avec $k \in [0, \frac{4}{27}]$

En préciser alors l'axe.

Exercice 11

Diagonaliser les matrices suivantes à l'aide d'une matrice orthogonale réelle

a)$M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

b)$M = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 12

Soit f un endomorphisme de E espace euclidien vérifiant :
pour tout (x, y) de E^2,
$(x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$;
démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout (x, y) de E^2 , $\alpha(x|y) = (f(x)|f(y))$.

Exercice 13

En utilisant que dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\theta : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire, prouver que pour toutes matrices symétriques A, B on a : $(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\,\mathrm{tr}(A^2).\,\mathrm{tr}(B^2)$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 14

Soit p endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E prouver p projecteur orthogonal si et seulement si ($p \circ p = p$ et $\forall x \in E,\ ||p(x)|| \leq ||x||$).

Exercice 15

Dans E espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 :

a) démontrer que toute rotation Φ vérifie

$$\forall (u, v) \in E^2,\ \Phi(u \wedge v) = \Phi(u) \wedge \Phi(v) \qquad (1)$$

b) réciproquement démontrer que tout endomorphisme Φ de E vérifiant (1) est une rotation ou l'endomorphisme nul.

Exercice 16

Soit S matrice symétrique réelle , $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses n valeurs propres réelles, prouver que :
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 17

Prouver que deux rotations f et g de E espace euclidien de dimension 3 commutent si et seulement si elles ont même axe ou sont des retournements d'axes orthogonaux.

Exercice 18

Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXUX \geq 0$.

Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive. Montrer qu'il existe une unique matrice R symétrique réelle et positive telle que $R^2 = U$.

Exercice 19

Dans $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, soient A et B deux matrices symétriques réelles, tels que $AB = BA$. Montrer que A et B sont diagonalisables dans une base orthonormée commune de vecteurs propres.