Chapitre 17 : **Surfaces**

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Proposer une paramétrisation du cylindre de base le cercle de centre O et de rayon 3 contenu dans le plan (xOy) et de directrice une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1;1;1)$.

Exercice 2

Proposer une paramétrisation du cône de sommet Ω le point de coordonnées $(1,2,3)$, et de base le cercle de centre O et de rayon 3 contenu dans le plan (xOy).

Exercice 3

Proposer une paramétrisation de la sphère de centre Ω le point de coordonnées $(1,2,3)$ et de rayon 2 privée de ses pôles.

Exercice 4

Préciser le plan tangent à la nappe paramétrée par $\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u-v \\ z &= u^2-v^2 \end{cases}$ au point M de coordonnées $(3,1,3)$ correspondant au paramètre $(u_0,v_0)=(2,1)$.

Exercice 5

Préciser le plan tangent à la quadrique d'équation $2(x-1)^2+(y+2)^2-z^2=2$ au point M de coordonnées $(2,0,2)$.

II. Exercices

Exercice 6

1) Paramétrer la surface $\mathcal{T}$ de révolution d'axe de révolution Oz contenant le cercle C d'équation $(x-3)^2+z^2=1$.
2) Déterminer les parallèles de $\mathcal{T}$.
3) Déterminer les méridiennes de $\mathcal{T}$.
4) Déterminer le contour apparent (conique) depuis le point S de coordonnées $(0,0,3)$.

Exercice 7

Déterminer l'intersection des plan tangents en M le point de coordonnées $(1,1,1)$ des surfaces Γ et Γ' déquations respectives $(x-1)^2+(y-1)^2+z=1$ et $(x-1)^2+(y-1)^2-(z-1)^2=0$.

Exercice 8

Déterminer une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{S}$ dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1,1,0)$ et de directrice la courbe paramétrée par $\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= t \end{cases}$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

Déterminer une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{C}$ dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1,1,0)$ et circonscrit à la surface $\mathcal{S}$ d'équation
$x^2+y^2-z=0$

Exercice 10

Déterminer une équation cartésienne du cône Σ de sommet Ω le point de coordonnées $(1,2,0)$ et circonscrit à la surface $\mathcal{S}$ d'équation
$x^2+y^2+z^2=1$

Exercice 11

Soient $\mathcal{S}$ une surface paramétrée par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur normé, et $A(x_A,y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$.
1) Pour tout $h \neq 0$ au voisinage de 0, exprimer $f(A+h\overrightarrow{u})$ à l'aide de $\overrightarrow{Grad\ f}_A \bullet \overrightarrow{u}$ et $f(A)$.
2) Calculer la pente de la droite reliant les points $(A,f(A))$ et $(M,f(M))$ pour $M = A+h\overrightarrow{u}$ proche de A.
3) Pour quel vecteur $\overrightarrow{u}$ a-t-on $|\overrightarrow{Grad\ f}_A \bullet \overrightarrow{u}|$ maximal ?
(penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz...)
4) En déduire que la projection dans le plan (xOy) de la ligne $\mathcal{L}_A$ de plus grande pente sur $\mathcal{S}$ à partir du point A est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{Grad\ f}_A$.
5) En déduire un vecteur directeur de $\mathcal{L}_A$ (dans $\mathbb{R}^3$).