Chapitre 10 : **Dérivation des fonctions réelles**

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Pour tout $t \geq 0$, calculer $\|f(t)\|$ (où $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle).
3. Représenter la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes par $(x(t), y(t)) = f(t)$, pour $t \geq 0$.
   (on pourra remarquer que l'affixe du point $f(t)$ est $te^{\mathrm{i}t}$ et placer $f(t_0)$, $f(t_0 + 2\pi)$, $f(t_0 + 4\pi)$ pour des valeurs de t_0 "bien choisies")

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{C},\ t \mapsto \dfrac{1}{t}e^{\mathrm{i}t}$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$, et tracer l'ensemble $\{\varphi(t),\ t > 0\}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\sqrt{t}, t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
3. Représenter la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes par $(x(t), y(t)) = f(t)$, pour $t \geq 0$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$. On considère un mobile dont la position à l'instant t est $f(t)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En projection sur le plan (Oxy), quel est le mouvement du mobile ?
3. Représenter la trajectoire.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(|t|)$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? f est-elle continue $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$? Même questions pour $g : t \mapsto (f(t), f(t^2))$.

Exercice 6

Déterminer les points singuliers de la courbe représentative de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

II. Exercices

Exercice 7

Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :
$f : x \mapsto x^{n-1}\ln(1 + (1/x))$;
$g : x \mapsto \exp(2x)\cos^2 x$;

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
Proposer une interprétation cinématique.

Exercice 9

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Justifier que l'application
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det(A - tI_n)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi'(0)$.

Exercice 10

Soit f application continue de $\mathbb{R}$ vers E un espace vectoriel euclidien.
Démontrer que $f$est dérivable en 0 si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(2x) - f(x)}{x}$ existe dans E
(utiliser les propriétés des limites pour x ,..., $x/2^n$, et ajouter les inégalités)

Exercice 11

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, pour $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. Dans chaque cas, tracer les trajectoires respectives des points

$$M(t) = (x(t), y(t))$$

où x, y sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, vérifiant le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

pour les conditions initiales respectives $M(0) = (1, 0)$, $M(0) = (0, 1)$, $M(0) = (-1, 0)$, $M(0) = (0, -1)$

- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $\lambda_2 = \lambda_1 > 0$
- $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta = \overline{\lambda_2}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta = \overline{\lambda_2}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^- \times \mathbb{R}$
- $\lambda_1 = \mathrm{i}\beta = \overline{\lambda_2}$, avec $\beta \in \mathbb{R}$
- Même question pour le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$