*Chapitre 18 :* **Intégrales multiples, aires et volumes**

# I. Applications directes du cours

**Exercice 1**

Calculer l'aire d'une sphère de rayon $R$.

**Exercice 2**

Calculer le volume d'une sphère de rayon $R$.

**Exercice 3**

Calculer l'aire et le volume d'un cylindre de hauteur $H$ et de base circulaire et de rayon $R$.

**Exercice 4**

Calculer l'aire de l'ellipsoïde d'équation $x^2+y^2+2z^2=1$.

# II. Exercices

**Exercice 5**

Calculer $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{-x\ln xy}{1-x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

**Exercice 6**

On considère l'arc défini par la représentation :

$$\begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= (\sin t)(2-\sin^2 t) \end{cases}$$

Déterminer la mesure de l'aire limitée par la courbe.

**Exercice 7**

On considère $D$ l'ensemble défini par $D=\{(x,y);\ x\geq 1 \text{ et } y\geq 1 \text{ et } x+y\leq 3\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

# III. Pour aller plus loin

**Exercice 8**

Calculer $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, où $D$ est l'ensemble défini par

$D=\left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\right\}$, pour $R\in\mathbb{R}_*^+$ fixé.

**Exercice 9**

Calculer la mesure $V$ du volume intérieur aux deux surfaces d'équations respectives $x^2+y^2+z^2=1$ et $x^2+y^2=z^2$.

**Exercice 10**

Déterminer le centre d'inertie d'une demi-sphère pleine homogène.

**Exercice 11**

Soit $\Gamma$ une courbe fermée paramétrée en polaire par une fonction $\rho:[0,2\pi[\to\mathbb{R}^+,\ \theta\mapsto\rho(\theta)$. On suppose que le point $O$ appartient au domaine $\Delta$ borné délimité par $\Gamma$.

1) Montrer que l'aire $A$ de $\Delta$ peut s'écrire :

$$A=\int_{[0,2\pi[}\frac{1}{2}\rho(\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

2) Application : montrer que l'aire de l'ellipse pleine $\mathcal{E}$ de centre $O$ et de demi-grand axe $a$ et de demi-petit axe $b$ vaut $\pi ab$.

*(on rappelle que $\rho:\theta\mapsto\dfrac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}$, avec $e=c/a$ et $c=\sqrt{a^2-b^2}$ est une paramétrisation de $\mathcal{E}$ dans un repère de centre delui de l'ellipse)*

3) Retrouver ce résultat en calculant $\displaystyle I=\int_0^a b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$.