Chapitre 14 : **Intégrales impropres, intégrales à paramètre**

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Etudier l'intégrabilité sur $I=\mathbb{R}_*^+$ de f où $f(x)$ vaut :

a) $x^n\ln x$, avec $n\in\mathbb{N}$;

b) $\dfrac{\ln|x+1|}{(1+x^2)\sqrt{x}}$;

c) $x^\alpha\ln(x+e^{\beta x})$, selon les valeurs de α et β ;

d) $\dfrac{e^{\cos x}x^\alpha}{\operatorname{ch}x+\sqrt{x}}$;

e) $\dfrac{\sin x}{x(\ln x)^2}$;

Exercice 2

Etudier l'existence et calculer

a) $\displaystyle\int_{]a,b[}\frac{1}{(t-a)(b-t)}\,\mathrm{d}t$;

b) $\displaystyle\int_{]1,+\infty[}(t^6-t^5)^{-1/3}dt$;

c) $\displaystyle\int_{]0,\pi/2[}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{]0,\pi/2[}\ln(\sin t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{]0,\pi/2[}\ln(\sin(2t))\mathrm{d}t$;

(on cherchera des relations entre ces réels)

d) $\displaystyle\int_{]-\pi/2,\pi/2[}\tan t\,\mathrm{d}t$;

II. Exercices

Exercice 3

Soit $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

1) Montrer que $I=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\mathrm{d}x$

2) Pour $\alpha\in]0,1[$, montrer à l'aide d'une décomposition en éléments simples que :

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}+1}\right)$$

3) Calculer I.

On pourra remarquer que pour $x\geq0$,

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{x\sqrt{1+x}},$$ *puis que*

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\right)$$

Exercice 4

Soit a réel de $]0,\pi]$, et pour $n\in\mathbb{N}^*$, f_n définie sur $]0,\pi[=I$ par $f_n(t)=\dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$ et $I_n(a)=\displaystyle\int_{]0,a[}f_n(t)\mathrm{d}t$

a) étudier l'intégrabilité de f sur I ;

b) Calculer $I_{n+1}(\pi)-I_{n-1}(\pi)$, en déduire pour tout n, $I_n(\pi)$

c) Trouver une relation entre $I_n(\pi-a)$ et $I_n(a)$

d) prouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_{n+1}(a)-I_n(a)=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n(a)=\frac{\pi}{2}$.

e) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,a[}\frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 5

Justifier que pour $n\in\mathbb{N}$, $x\mapsto\dfrac{x^n}{(x^2(1-x))^{1/3}}$ est intégrable sur $]0,1[$, donner une formule de récurrence sur $J_n=\displaystyle\int_{]0,1[}\frac{x^n}{(x^2(1-x))^{1/3}}\mathrm{d}x$, calculer J_0 puis une expression de J_n avec des factorielles

Exercice 6

Soit (f_n) suite de fonctions réelles définies sur $[0,1]$, pour $n\geq0$, par $f_n(x)=\dfrac{(x^3+x)e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$;

a) Prouver que (f_n) converge simplement vers une fonction f sur $[0,1]$.

b) Prouver que $|f_n(x)-f(x)|\leq\dfrac{2}{(nx+1)}$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 7

Soit g la fonction réelle définie sur D partie de $\mathbb{R}$, par $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$;

a) Donner explicitement D et prouver que g est C^∞ ;

b) Justifier que $x\mapsto xg(x)-g(x+1)$ est constante sur D ;

c) Représenter g sur $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$, prouver que pour tout $x>0$, $g(x)=\displaystyle\int_{]0,1]}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

d) donner un D.L. en 0 à droite de $x\mapsto g(\frac{1}{x})$

Exercice 8

Démontrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

Exercice 9

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{(-t)^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$ admet une limite que l'on précisera.

Exercice 10

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,n[}\frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t^{\alpha-1}}\mathrm{d}t$ pour $\alpha<2$

Exercice 11

Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\mathrm{d}t$
(distinguer deux cas pour a)

Exercice 12

On pose $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^x}$.
1) Etudier le domaine de définition D de f.
2) Montrer que f est décroissante sur D.
3) Montrer que f est continue sur D.
4) Donner une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$, pour $x\in D$.
5) Calculer $f(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 13

Soient $A=[0,+\infty[$, $I=[0,+\infty[$, et
$F: A\times I\to\mathbb{R},\ (x,t)\mapsto xe^{-xt}$. Montrer que :
1) pour tout $t\in I$, $\varphi_t: x\mapsto F(x,t)$ est continue.
2) pour tout $x\in A$, $\psi_x: t\mapsto F(x,t)$ est continue par morceaux.
3) pour tout $x\in A$, ψ_x est intégrable sur I.
4) $f: A\to\mathbb{R},\ x\mapsto\int_I F(x,t)\mathrm{d}t$ n'est pas continue sur A.

Exercice 14

Soit $f: x\mapsto\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\mathrm{d}t$.
1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$\forall x,\ f'(x)=2xf(x)$
3) En déduire que :
$\forall x,\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}$.

III. Pour aller plus loin

Exercice 15

Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}-1\right)\mathrm{d}x$

Exercice 16

Soit f définie sur $I=]0,1[$ par
$f(x)=\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$.
Etudier son intégrabilité et prouver que
$\int_I f=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$.
Terminer le calcul en utilisant
$\sum\limits_{1\le k\le n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+o(\frac{1}{n})$

Exercice 17

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{+\infty} f'=0=\lim\limits_{-\infty} f'$, prouver que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ en utilisant une intégration par parties.

Exercice 18

Soient p,q réels de $\mathbb{R}_*^+$ prouver que
$\int_{[0;1]}\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nq+p}$

Exercice 19

On considère la fonction
$\Gamma:]0,+\infty[,\ x\mapsto\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$
1) Justifier la définition ci-dessus, puis étudier sa continuité.
2) Calculer $\Gamma(1)$.
3) Montrer que pour tout $x>0$,
$\Gamma(x+1)=x\ \Gamma(x)\quad(\star)$.
4) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$
5) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Gamma^{(2)}$.
6) Montrer que Γ est convexe sur $]0,+\infty[$
7) A l'aide de $(\star)$, montrer que $\Gamma(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x}$.
8) En formant le quotient $\frac{\Gamma(x)}{x}$, montrer que la courbe représentative de Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.
9 a)En utilisant l'inégalité $\ln(1+u)\le u$ pour tout $u>-1$, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,n],\ 0\le e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\le\frac{t^2}{n}e^{-t}$$

9b) En déduire que
$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
9c) Montrer que $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$