

TD du 14 octobre 2009 : Introduction à la réduction

On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$.

Soit $f : E \rightarrow E, (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + 2x_2, -2x_1 - 3x_2)$.

On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de E .

I. Valeurs propres, vecteurs propres, sous espaces propres

1. Ecrire la matrice A de f dans la base \mathcal{B}
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ d'inconnue $\vec{x} \in E$ admet des solutions non nulles si et seulement si $\lambda \in \{1, -2\}$.
3. En notant $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$, montrer que $\text{Ker}(f - id)$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur \vec{v}_1 de coordonnées $(2, -1)$ (dans la base canonique), et que $\text{Ker}(f + 2id)$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur \vec{v}_2 de coordonnées $(1, -2)$.

N.B. : λ_1 est appelée valeur propre, \vec{v}_1 vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_1 , et $\text{Ker}(f - \lambda_1 id)$ sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1 .

II. Changement de base et diagonalisation

1. Que pensez-vous de $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$?
2. Vérifier que la matrice A' de f dans la base \mathcal{B}' est diagonale.
3. Ecrire la matrice $P = \text{Mat}(id, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Est-elle inversible ?
4. (a) Exprimer \vec{v}_1 et \vec{v}_2 en fonction de \vec{e}_1, \vec{e}_2 et des coefficients de P .
 (b) Soit $\vec{x} \in E$. On note X' le vecteur colonne représentant \vec{x} dans la base \mathcal{B}' , et X le vecteur colonne représentant \vec{x} dans la base canonique. Vérifier que $X = PX'$.
 (c) Cas particulier $\vec{x} = 7\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$: déterminer X puis X' en calculant P^{-1} .
 (d) Vérifier que $A' = P^{-1}AP$

N.B. : P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

III. Applications

1. Déterminer le rang de A' . En déduire celui de f . f est-elle un isomorphisme ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $(A')^k$. En déduire A^k .
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (A')^k$. En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$.
4. Déterminer la limite (coefficient par coefficient) de l'expression matricielle : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (A')^k$. Interprétation ?