exercice 1) Déterminer les polynômes P dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

---

exercice 2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $Tr(A)$ est une entier relatif.

---

exercice 3) L'application ψ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\psi(P)(X) = P(X^2) + (1+X^2)P(X)$ est-elle linéaire ? injective ? surjective ?

---

exercice 4) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

---

exercice 5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique , telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$.
Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

---

exercice 6)
Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(n+2)}$.

---

exercice 7) La fonction $f : (x,y) \mapsto x\ln(x^2+y^2)$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

---

exercice 8) Soit $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} 4^n I_n$.

---

exercice 9) La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1-n & \dots & \dots & 1-n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

---

exercice 10) Donner la nature de la surface (S) d'équation : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 3$. Trouver le plan tangent à (S) en $(3,5,2)$ noté P.

---

exercice 11) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que , si A est diagonalisable , alors $Ker(A) = Ker(A^2)$.

---

exercice 12) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.
Montrer que si n est impair, A ne peut pas être inversible.
Montrer en utilisant des exemples, que si n est pair, on ne peut pas dire si A est inversible ou non.

---

exercice 13) Dans $\mathbb{R}^n$, quel est le rang de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

---

exercice 14) Monter que $\varphi : P \mapsto (X+2)P(X) - XP(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. En déterminer le noyau.

---

exercice 15) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Ker(^tAA) = Ker(A)$.

---

exercice 16) Soit (a,b,c) 3 réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on considère le plan P d'équation : $cx+by+az=0$.
Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P .

---

exercice 17) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \arccos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \arccos\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

---

exercice 18) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer son rang. A est-elle diagonalisable ?
En déduire le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & x \\ x & 1+x^2 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

---

exercice 19) Soit p un projecteur de $E=\mathbb{R}^n$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\varphi(u) = u \circ p$.
Montrer que φ est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Planche 1) *CCP 2006* Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\Delta_A = \left\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) |\ M + {}^tM = Tr(M)A\right\}$.
On note $S_n(\mathbb{C})$ (resp. $A_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

1. Montrer que Δ_A est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et que $A_n(\mathbb{C})$ est inclus dans Δ_A.
2. Si $Tr(A) \neq 2$, montrer que $\Delta_A = A_n(\mathbb{C})$.
3. Si $Tr(A) = 2$ et si $A \notin S_n(\mathbb{C})$, trouver Δ_A.
4. Montrer que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est somme directe de $S_n(\mathbb{C})$ et de $A_n(\mathbb{C})$.
5. Si $Tr(A) = 2$ et si $A \in S_n(\mathbb{C})$, trouver Δ_A.

Planche 2) *CCP 2006*

1. Etudier le domaine de définition, la continuité et la monotonie de $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t$ sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.
3. Calculer $f(1)$.
4. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0^+ et $+\infty$.
5. Donner l'allure du graphe de f.

Planche 3) *CCP 2006*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $Det(A)$ puis déterminer les éléments propres de A.

Planche 4) *CCP 2006*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $\|.\|$ une norme sur E, dérivant d'un produit scalaire et $(a_0, a_1, ..., a_n)$ $n+1$ réels distincts.

On pose , pour $P \in E$, $\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|$.

1. Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur E.
2. Montrer que $\forall P, Q \in E$, $\|P+Q\|^2 + \|P-Q\|^2 = 2(\|P\|^2 + \|Q\|^2)$.
3. Montrer qu'il existe des polynômes P_i tels que $P_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Calculer alors $\|P_i + P_j\|_1$, $\|P_i - P_j\|_1$, $\|P_i\|_1$. Conclusion ?
4. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs b et c tels que $\forall P \in E$, $b\|P\|_1 \leq \|P\| \leq c\|P\|_1$.
5. Pourquoi ne peut-on pas avoir $b = c = 1$?

Planche 5) *CCP 2006* Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$ et $f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{E(x)}{n}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{si} \quad x > n+1 \end{cases}$ (où E est la fct partie entière).

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ puis que $u_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.
2. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer alors la limite l de $(u_n)_n$.
4. Montrer que la suite $\big(n(u_n - l)\big)_n$ est bornée.

Planche 6) *CCP 2007*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, \pi]$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

1. Etudier le développement en série de Fourier de f.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, 2π-périodique, impaire tel que sur $[0, 1]$, g est affine et sur $[1, \pi]$, $g = f$.
   Etudier le DSF de g.
3. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$.

Planche 7) *CCP 2007*

Pour $s > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{s-1}\mathrm{d}t$ et $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$

1. Justifier que les fonctions Γ et I_n sont bien définies sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\forall s > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(s) = n^s I_n(s)$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\Gamma(s)}{(2k+1)^s}$. Exprimer $S_n(s)$ à l'aide d'une intégrale.
4. En déduire que pour $s > 0$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$ converge et donner sa limite.
5. Application : Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Planche 8) *CCP 2007*

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, Soit D la droite paramétrée par $\begin{cases} x &= \alpha t \\ y &= \beta t \\ z &= c \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de R^3 et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ le symétrique de M_0 par rapport à la droite D.
   Montrer que :
   $$x_1 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)x_0 + 2\alpha\beta y_0}{\alpha^2 + \beta^2} \quad , \quad y_1 = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)y_0 + 2\alpha\beta x_0}{\alpha^2 + \beta^2} \quad , \quad z_1 = 2c - z_0$$
2. Soient $m \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On considère 4 droites d'équations cartésiennes :
   $D_1 : \begin{cases} y &= mx \\ z &= h \end{cases}$ $D_2 : \begin{cases} y &= mx \\ z &= -h \end{cases}$ $D_3 : \begin{cases} y &= -mx \\ z &= h \end{cases}$ $D_4 : \begin{cases} y &= -mx \\ z &= -h \end{cases}$
   On note A_1 (resp. A_2, A_3, A_4) le symétrique de M_0 par rapport à D_1 (resp. D_2, D_3, D_4).
   Déterminer les coordonnées de ces 4 points et montrer qu'ils sont coplanaires.
3. Montrer qu'il passe par ces 4 points un unique plan ssi $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$
