

# I. Espace vectoriel de fonctions

## Exercice 1

Montrer que  $\mathcal{A} = \{f \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}); \forall x > 0, \int_0^{+\infty} e^{-xt}|f(t)|dt < +\infty\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

# II. Etude de branches infinies

## Exercice 2

Etudier  $\Gamma$  la courbe paramétrée par : 
$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{3}{t} \\ y(t) = \frac{3}{t^2 - 2t} \end{cases}$$

1) Montrer que  $x$  et  $y$  sont définies et dérivables sur  $D = ]-\infty, 0[ \cup ]0, 2[ \cup ]2, +\infty[$ .

2) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{2}$ , puis que  $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) - \frac{1}{2}x(t) = \frac{-3}{4}$ . En déduire qu'une asymptote à  $\Gamma$  lorsque

$t \rightarrow 0^+$  (resp.  $t \rightarrow 0^-$ ) est la droite  $\Delta$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

3) Montrer que  $y(t) - \frac{1}{2}x(t) + \frac{3}{4} = \frac{-7}{8}t + o(t)$ .

En déduire que  $\Gamma$  est au dessous de  $\Delta$  lorsque  $t \rightarrow 0^-$ , et que  $\Gamma$  est au-dessus de  $\Delta$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$

4) Montrer que la droite  $\Delta_2$  d'équation  $y = 0$  est est asymptote à  $\Gamma$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ )

5) Montrer que la droite  $\Delta_3$  d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est est asymptote à  $\Gamma$  lorsque  $t \rightarrow 2$ .

6) Tracer  $\Gamma$ .

# III. Conique

## Exercice 3

Soit  $\mathcal{C}$  la conique définie par :

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 + 3x + 2y - 5 = 0\}$$

1) Quelle est la nature de  $\mathcal{C}$  ?

2) Montrer que l'équation réduite de  $\mathcal{C}$  est  $X^2 + 2Y^2 = \frac{31}{4}$ .

3) Pour tout triplet  $T = (u, v, h) \in \mathbb{R}^3$ , avec  $(u, v) \neq (0, 0)$ , on note

$\mathcal{D}_T$  la droite d'équation  $ux + vy + h = 0$ .

Déterminer les triplets  $T$  pour lesquels  $\mathcal{D}_T$  est tangente à  $\mathcal{C}$ .

(on pourra utiliser le fait que le vecteur  $\overrightarrow{\text{Grad } F}_a$  dirige la normale au point  $a$  à une courbe plane d'équation cartésienne  $F(x, y) = 0$ )

## IV. Séries (CCP08, PC, ép 2)

### Problème 1

Pour tout nombre réel  $s$ , on considère l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre  $(\mathcal{E}_s)$  suivante :

$$(\mathcal{E}_s) \quad (1 - x^2) y''(x) - 2(s + 2)xy'(x) - 2(s + 1)y(x) = 0.$$

On note  $f_s$  la solution de  $(\mathcal{E}_s)$  sur  $] - 1, 1[$  qui vérifie les conditions initiales  $f_s(0) = 0$  et  $f'_s(0) = 1$ .

1. Soit  $g_s$  la fonction définie sur  $] - 1, 1[$  par  $g_s(x) = f_s(x) + f_s(-x)$ .
  - a) Montrer que  $g_s$  est solution de  $(\mathcal{E}_s)$  sur  $] - 1, 1[$ .
  - b) Calculer  $g_s(0)$  et  $g'_s(0)$ . En déduire que  $f_s$  est impaire.
2. Déterminer en fonction de  $s$  l'unique valeur de  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que la fonction  $x \mapsto (1 - x^2)^\alpha$  soit solution de  $(\mathcal{E}_s)$  sur  $] - 1, 1[$ .
3. Soit  $u_s$  la fonction définie sur  $] - 1, 1[$  par  $u_s(x) = (1 - x^2)^{s+1} f_s(x)$ .
  - a) Montrer que la dérivée  $u'_s$  de  $u_s$  est solution sur  $] - 1, 1[$  de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}'_s) \quad (1 - x^2) y'(x) + 2sxy(x) = 0.$$

- b) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E}'_s)$  sur  $] - 1, 1[$ .
  - c) Calculer  $u'_s(0)$  et  $u_s(0)$ . En déduire que  $u_s(x) = \int_0^x (1 - t^2)^s dt$  pour tout  $x \in ] - 1, 1[$ .
4. Soit  $y$  une fonction impaire, définie sur un intervalle ouvert  $I$  contenant 0, développable en série entière sur  $I$ . On note  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$  le développement en série entière de  $y$  sur  $I$ .
  - a) Montrer que pour que  $y$  soit une solution de  $(\mathcal{E}_s)$ , il faut et il suffit que l'on ait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$c_{n+1} = \frac{2s + 2n + 3}{2n + 3} c_n.$$

- b) En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  une expression de  $c_n$  en fonction de  $n$  et  $c_0$ .
  - c) Pour quelles valeurs de  $s \in \mathbb{R}$  l'équation  $(\mathcal{E}_s)$  admet-elle des solutions polynomiales impaires non identiquement nulles ?
  - d) On suppose que  $s \notin \{-n - \frac{3}{2}; n \in \mathbb{N}\}$ , que  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$  est solution de  $(\mathcal{E}_s)$  sur  $I$ , et que  $c_0 \neq 0$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$ .

5. Déduire des questions précédentes que pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in ] - 1, 1[$  on a :

$$f_s(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{2^n n!}{(2n + 1)!} \prod_{k=1}^n (2s + 2k + 1) \right] x^{2n+1}.$$

6. Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in ] - 1, 1[$  on a :

$$\int_0^x \frac{dt}{(1 - t^2)^{p+\frac{3}{2}}} = \frac{Q_p(x)}{(1 - x^2)^{p+\frac{1}{2}}},$$

où  $Q_p$  est une fonction polynomiale impaire de degré  $2p + 1$  que l'on explicitera.

Expliciter en particulier  $\int_0^x \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{3}{2}}}$  et  $\int_0^x \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{5}{2}}}$ .

## V. Projecteurs orthogonaux (PT 2009 épreuve A)

### Problème 2

Dans tout le problème,  $n$  est un entier strictement positif,  $E$  désigne un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ ,  $I_E$  l'identité dans  $E$ , et  $O_E$  l'endomorphisme nul sur  $E$ .

1. Dans cette question,  $E$  est de dimension 2. On considère la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  de  $E$ . On considère l'application linéaire  $f$  ayant pour matrice dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que  $f$  est un projecteur. Quel est son rang ?
- (b) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
2. Dans cette question,  $E$  est de dimension 3. On considère la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $E$ .  $D$  désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$  et  $P$  le plan engendré par les vecteurs  $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$  et  $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$ . Déterminer la matrice, dans la base  $\mathcal{B}$ , du projecteur  $\pi$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .
3. Dans cette question, et jusqu'à la fin du problème,  $p$  désignera un projecteur de  $E$ , où  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que  $\text{Ker } p$  et  $\text{Im } p$  sont supplémentaires dans  $E$  ; on pourra écrire, pour  $x \in E$ ,  $x = [x - p(x)] + p(x)$ .
4. Soit  $q$  l'endomorphisme défini par :  $q = I_E - p$ . Montrer que  $q$  est un projecteur de  $E$ . Déterminer le noyau et l'image de  $q$ . Calculer  $p \circ q$  et  $q \circ p$ .
5. Soient  $p_1$  et  $p_2$  deux projecteurs de  $E$  tels que  $p_1 \circ p_2 = O_E$ .
- (a) Montrer que  $q$  est un projecteur de  $E$ .
- (b) Montrer que  $\text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2 \subset \text{Ker } q$ .
- (c) Montrer que  $\text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2 = \text{Ker } q$ .
6. L'espace vectoriel  $E$  est désormais muni d'un produit scalaire  $\langle ; \rangle$ . La norme du vecteur  $x \in E$  est notée  $\|x\|$ . Enfin, le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  sera noté  $F^\perp$ . On rappelle qu'un projecteur de  $E$  est dit orthogonal lorsque son noyau et son image sont orthogonaux. Soit  $p$  un projecteur de  $E$ .
- (a) Montrer que si  $p$  est un projecteur orthogonal, alors :
- $$\forall u \in E, \|p(u)\| \leq \|u\| \quad (\star)$$
- (b) Montrer que si la condition  $(\star)$  est vérifiée, alors  $p$  est un projecteur orthogonal.

## VI. Inégalité de convexité

### Exercice 4

1) Déterminer la tangente à la courbe représentative de  $\exp$  en 0, puis la pente de la corde reliant les points  $(0, e^0)$  et  $(x, e^x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

A l'aide de la convexité de la fonction  $\exp$  sur  $\mathbb{R}$ , montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .

2) Déterminer la tangente à la courbe représentative de  $\ln$  en 1, puis la pente de la corde reliant les points  $(1, \ln 1)$  et  $(x, e^x)$  pour  $x > 0$ .

A l'aide de la concavité de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(1 + x) \leq x$ .

3) Soit  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Déterminer la tangente à la courbe représentative de  $\sin$  en 0, puis la pente de la corde reliant les points  $(0, \sin 0)$  et  $(\frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2})$ , et la pente de la corde reliant les points  $(0, \sin 0)$  et  $(x, x)$ .

A l'aide de la concavité de la fonction  $\sin$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , montrer que :  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ .

## VII. Inégalité et formule de Taylor

### Exercice 5

A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, établir l'inégalité :

$$\forall u \in \mathbb{R}, |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$$

## VIII. Fonctions définies par un intégrale

### Exercice 6

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . On pose  $\Phi : x \mapsto \int_x^{x^2} f(x, t) dt$ .

On souhaite montrer que  $\Phi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\Phi'(x) = \int_x^{x^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + 2xf(x, x^2) - f(x, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Vérifier cette formule dans le cas particulier  $f : (x, t) \mapsto xt$

2) On se place ensuite dans le cas général.

Soit  $G : (x, t) \mapsto \int_0^t f(x, u) du$ . Justifier que  $G$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ , dérivable et que  $\frac{\partial G}{\partial t} = f$ .

4) En déduire que  $\Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) En déduire que  $\Phi(x) = G(x, x^2) - G(x, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

6) Conclure que  $\Phi$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.