Chapitre 3 : **Déterminants**

I. Applications directes du cours

Exercice 1

On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique directe de $\mathbb{R}^3$. Pour chacune des familles suivantes dite si elle est une base de $\mathbb{R}^3$ et si oui si elle est directe : $\mathcal{F}_1 = (\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, $\mathcal{F}_2 = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{i})$, $\mathcal{F}_3 = (2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Exercice 2

On pose $n = 2$. Rappeler la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Ecrire dans cette base la matrice de l'application linéaire $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM$, puis calculer $\det(f)$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler pourquoi $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
2. A l'aide d'une base $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition en somme directe, calculer $\det(f)$, où $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM$.

Exercice 4

Calculer : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \mathrm{Det}(A - xI_3)$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Exercice 5

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{T}$ des valeurs de t pour lesquelles A_t est inversible.
2. Pour $t \in \mathcal{T}$, résoudre à l'aide des formules de Cramer le système $A_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Résoudre, en fonctions des valeurs des paramètres réels a et b le système $\begin{cases} ax & +y & +z & +t & = 1 \\ x & +ay & +z & +t & = b \\ x & +y & +az & +t & = b^2 \\ x & +y & +z & +at & = b^3 \end{cases}$

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $Com(A) = ((-1)^{i+j} A_{i,j})$ la matrice des cofacteurs de A.
2. Calculer $A \times {}^tCom(A)$ et $\det(A)$.

Exercice 8

(A SAVOIR FAIRE IMPERATIVEMENT)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1, \ldots, C_n$ ses vecteurs colonnes, et $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes. Soient $(i,j) \in [\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $T_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{i,j}$.

1. Justifier que $T_{i,j,\lambda}$ est inversible.
2. A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à droite par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(MT_{i,j,\lambda})$ et $\det(M)$.
3. A quelle opération élémentaire sur M correspond la multiplication à gauche par $T_{i,j,\lambda}$? Comparer $\det(T_{i,j,\lambda}M)$ et $\det(M)$.

II. Exercices

Exercice 9

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$.

Exercice 10

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Exprimer à l'aide de P et P^{-1} les matrices $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id)$ et $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id)$.

Exercice 11

Soit $\mathcal{B}$ une base de $E = \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $V_1, \ldots, V_n \in E$. Montrer que

$$\mathrm{tr}(f)\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(V_1, \ldots, f(V_i), \ldots, V_n).$$

Exercice 12

Soient n un entier, $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & B \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \neq 0$. En déduire que M est inversible. Calculer son inverse.

(on pourra le chercher sous la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & (*) \\ 0_n & B^{-1} \end{pmatrix}$)

Exercice 13

Soient L et C respectivement des matrices ligne et colonne et dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} I_{n-1} & C \\ L & \alpha \end{pmatrix}$, prouver que A est inversible si et seulement si $LC \neq \alpha$; calculer alors A^{-1}.

Exercice 14

Soient pour p, q, m, n entiers naturels, $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$; on pose $r = \text{rg}(A)$ et $s = \text{rg}(B)$. Comparer à $r + s$ le rang des matrices suivantes : a) si $m = p$, $M_1 = [AB]$ b) si $n = q$, $M_2 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ c) $M_3 = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, pour $C \in M_{m,q}(\mathbb{R})$.

Exercice 15

Calculer le rang de $M_{p,q,r} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$, et étudier l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui à (p, q, r) associe $M_{p,q,r}$.

Exercice 16

Calculer pour a, b, c réels fixés :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+b & & \dots & (b) \\ & a+b & & \dots \\ \dots & & \ddots & \\ (a) & \dots & & a+b \end{vmatrix}. \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 17

Calculer déterminant de $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n : a) $a_{ii} = x$, $a_{ii+1} = a$, $a_{i+1i} = b$ et si $|i - j| > 1$, $a_{ij} = 0$ b) $a_{ii} = x + i$, $a_{ii+1} = -x$, $a_{i+1i} = -i$ et si $|i - j| > 1$, $a_{ij} = 0$ c) $a_{ij} = P_{i-1}(x_j)$ où les P_i sont des polynômes de degré i de coefficients dominants a_i, et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ n réels distincts.

Exercice 18

calculer la matrice inverse de $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n dans les cas suivants : a) $a_{ij} = 0$ si $i > j$ et $a_{ij} = j - i + 1$ sinon. b) $\begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$ (si cet inverse existe)

Exercice 19

Calculer si possible l'inverse de $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n

a) $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = a$ si $|i - j| > 0$;

b) $a_{ii} = 0$, $a_{ii+1} = a_{i+1i} = 1$ et si $|i - j| > 1$, $a_{ij} = 0$

c) $n = 4$, $a_{ii} = 1$, $a_{ii+1} = a_{i+1i} = a_{14} = a_{41} = 0$, $a_{ii+2} = a_{i+2i} = 2$

Exercice 20

Résoudre pour $a, b, (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ complexes donnés

i) $x_1 = ax_n + b$ et $x_{i+1} = ax_i + b$ $(1 \leq i \leq n - 1)$

ii) $x_i + x_{i+1} = 2a_i$ $(1 \leq i \leq n - 1)$

III. Pour aller plus loin

Exercice 21

Soit A une matrice carrée telle qu'il existe un entier n tel que $A^n = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice n). Calculer $\det A$.

Exercice 22

Soit n un entier impair, et soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Calculer $\det A$.

Exercice 23

(déterminant de Vandermonde) Soit n un entier fixé. $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$V_k = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer V_1, V_2.
2. En faisant les opérations sur les colonnes $C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - x_1 C_1$, montrer que $V_3 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$.
3. En généralisant ce calcul, montrer que $V_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} (x_j - x_i \right)$.
4. Que dire de $(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $V_n = 0$?

Exercice 24

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On note $C_1, \dots, C_n$ ses vecteurs colonnes.

1. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ En développement $\det A$ par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne, justifier que $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} A_{i,j}$, où $((-1)^{i+j} A_{i,j})$ est la famille des cofacteurs de A.

2. Soient $j, k \in [\![1, n]\!]$ deux entiers distincts. On note B la matrice dont toutes les colonnes coïncident avec celles de A, sauf la $k^{\text{ième}}$ qui est égale à $j^{\text{ième}}$. Exprimer les cofacteurs des éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne de B à l'aide de ceux de A. En remarquant que $\det(B) = 0$, montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = 0$

3. Conclure que ${}^t A \ Com(A) = \det(A) I_n$

4. application : déterminer les inverses respectifs des matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.