I) Une fonction continue par morceaux

1. Executer > `with(plots) ;`
2. Executer > `?piecewise`
3. Définir la fonction $f :]-\pi,\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3-x^2 & \text{si}\quad x \in]-\pi,0] \\ 1+x^2 & \text{si}\quad x \in]0,\pi] \end{cases}$
4. Tracer le graphe de la fonction f.
   ajouter l'option `discont=true`
5. Tracer le graphe sur $[-10\pi, 10\pi]$ de la fonction `h :=x-> (x-2*Pi*floor((x+Pi)/(2*Pi))) ;`
6. Définir la « périodisée » g de f sur $\mathbb{R}$.
   Tracer son graphe sur $[-10\pi, 10\pi]$.

II) Coefficients de Fourier, série de Fourier

1. Définir une procédure `cc:=proc(h,n) ;` qui à une fonction h et à un entier $n \in \mathbb{Z}$ associe son coefficient de Fourier $c_n(h)$.
2. Définir deux procédure `a:=proc(h,n) ;` et `b:=proc(h,n) ;` qui à une fonction h et à un entier $n \in \mathbb{N}^*$ associe ses coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(h)$ et $b_n(h)$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.
4. Définir une procédure `sommepart:=proc(h,N) ;`, qui à une fonction h et à un entier $N \in \mathbb{N}$ associe la somme partielle d'indice N de sa série de Fourier réelle.
5. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions f et $S_5(f)$;
6. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions f^2 et $(f - S_5(f))^2$;
   Commentaire ?
7. Définir une procédure `graphes:=proc(h,N) ;` qui a pour arguments une fonction f et un entier $N \in \mathbb{N}$ et trace les graphes des fonctions $f, S_1(f), \ldots, S_n(f)$ sur $[-3\pi, 3\pi]$.

III) Propriétés des séries de Fourier

1. Définir la primitive $F :]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ de f valant 1 en 0.
2. Calculer les coefficients de Fourier de F.
3. Comparer $S_N(F)'$ et $S_N(f)$, pour un entier $N \in \mathbb{N}$.
4. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions f, F, $S_5(f)$ et $S_6(F)$;
5. Vérifier le théorème de Parseval pour la fonctin f.
6. Vérifier le théorème de Dirichlet pour la fonctin f, à l'aide d'une procédure `dirichlet :=proc(h,x1) ;`
   (on pourra utiliser la commande `limit(h,x=x1,left)+limit(h,x=x1,right))/2`)

IV) Polynômes trigonométriques

1. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $S_N : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$.
   Exprimer S_N comme un polynôme trigonométrique complexe.
2. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $T_N : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1+n^2} e^{int}$.
   Exprimer T_N comme un polynôme trigonométrique réel.
3. Soit $P \in \mathbb{N}$. Vérifier que les polynômes trigonométriques $U_P : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=-P}^{-1} e^{int}$ et $V_P : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{P} e^{int}$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel). Qu'en est-il de $U_P + V_P$ et $U_P - V_P$?

V) Calculs

Vous pouvez maintenant utiliser Maple pour vérifier les résultats des calculs faits dans la feuille d'exercice du TD du chapitre 8, et **résoudre les équations différentielles** proposées.