

Centrale

Math II : avec Maple

Planche 1)

1. Soit a, b deux réels > 1 . On note $I(a, b) = \int_0^\pi \ln \left(\frac{b - \cos t}{a - \cos t} \right) dt$

Donner la valeur de cette intégrale à l'aide du logiciel de calcul formel. Effectuer vous-même le calcul.

2. On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues tq : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$.

(a) Soit f une telle fonction. Montrer que f est de classe C^∞ .

(b) Montrer qu'il existe une constante λ tq : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x)$.

(c) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

(d) Conclure.

Planche 2) Centrale 2008

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, symétrique. On dit que A est positive ssi $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \geq 0$.

1. Trouver une CNS pour que A soit positive.

2. Montrer que si A est positive, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive telle que $B^2 = A$.

3. Montrer que B est unique et qu'il existe un polynôme P tel que $B = P(A)$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer explicitement B et P avec Maple.

5. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice symétrique positive A telles que $M = OA$.

Planche 3) Centrale 2008

Soit a, b deux nombres réels. On appelle A_n la matrice de taille n telle que tous les coefficients diagonaux valent 1 ; Les coefficients de la première ligne sont 1, puis alternativement b et a , idem pour la première colonne ; tous les autres coefficients sont nuls.

1. Ecrire une procédure à l'aide de Maple dont les données sont n, a, b et qui renvoie la matrice A_n .

2. A l'aide de cette procédure, calculer les éléments propres de A_n , ainsi que son déterminant et son polynôme caractéristique.

3. Que peut-on conjecturer pour le déterminant de A_n dans le cas général ?

4. En déduire les valeurs propres de A_n dans le cas général.

Planche 4) *Centrale 2008*

Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = 0$ et pour $x > 0$, $\phi(x) = \frac{1 - \cos x}{x^{2/3}}$.

1. ϕ est-elle C^0 , C^1 , C^2 sur \mathbb{R}^+ ?

Tracer ϕ à l'aide de Maple.

2. Montrer que, pour tout x dans $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$, $\phi(x) \geq \frac{1 - \cos x}{(2(n+1)\pi)^{2/3}}$.

ϕ est-elle intégrable sur \mathbb{R}^+ ?

ϕ^2 est-elle intégrable sur \mathbb{R}^+ ?

Si oui, en donner une valeur exacte simple et une valeur approchée à l'aide de Maple.

3. ϕ' et ϕ'' sont-elles intégrables ou de carré intégrables sur $]0, 2\pi[$? sur $[2\pi, +\infty[$?

Donner la valeur de $\int_{2\pi}^{+\infty} \phi - \phi'^2 + \phi''^2$?

Planche 5)

Soit $a > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(x + a)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+a+i} - \frac{1}{x+a-i} \right)$.

2. Montrer que f admet un développement en série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ dont on précisera le rayon de convergence.

3. On pose $S_6(x) = \sum_{n=0}^6 u_n x^n$. Représenter sur un même graphe S_6 et f .

4. Soit $\theta = \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$. Montrer que $a + i = \sqrt{a^2 + 1} e^{i\theta}$. Exprimer alors le DSE de f en fonction de θ .

5. Application : Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^{n/2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.
-

Planche 6)

1. Soit α un réel > 0 . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan(n))^\alpha$ et $v_n = (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$.

2. On considère la fonction f de deux variables définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$.

(a) Montrer que f est bornée sur \mathbb{R}^2 et atteint ses bornes.

(b) Etudier les extrema de f .