

du 30.11.09 au 04.12.09

Les points **en gras** sont à privilégier comme questions de cours.

## Séries de Fourier

- Espaces vectoriels  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .
- Coefficients de Fourier complexes et trigonométriques d'une fonction  $2\pi$ -périodique continue par morceaux.  
**propriétés élémentaires** des coefficients de Fourier complexes (cas d'une fonction à valeur réelle, parité, imparité).
- linéarité de l'application  $\mathcal{F} : f \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ .
- Série de Fourier complexe, série de Fourier trigonométrique d'une fonction de  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- **Structure préhilbertienne** sur  $C_{2\pi}$  : produit scalaire usuel, norme  $\| \cdot \|_2$ .  
**Famille orthonormale** des  $e_n : t \mapsto e^{int}$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Projeté orthogonal sur  $\text{Vect}((e_i)_{-p \leq i \leq p})$ . **Lien avec les séries de Fourier**. Inégalité de Bessel.
- **Théorème de convergence en moyenne quadratique**. Formule de Parseval.  
*N.B. : la généralisation de résultats utilisant la structure préhilbertienne de  $C_{2\pi}$  à l'espace  $CM_{2\pi}$  a été faite, les preuves sont non exigibles des étudiants dans ce cadre)*
- injectivité de  $\mathcal{F} : C_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ .
- Relation entre **coefficients de Fourier** d'une fonction  $C^1M$  et ceux de sa **dérivée**.  
**Convergence normale** de la série de Fourier d'une fonction  $C^1M_{2\pi}$ .  
**Théorème de Dirichlet** (preuve non exigible)

## Espaces préhilbertiens, espaces vectoriels euclidiens

- **Produit scalaire réels ou hermitien**
- **Norme**. Les normes  $\| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_{\infty}$  sur  $\mathbb{K}^n$ ,  $\| \cdot \|_2$  et  $\| \cdot \|_{\infty}$  sur  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$  sont à connaître.  
Norme associée à un produit scalaire.
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz**. Cas d'égalité.  
Inégalité triangulaire pour une norme associée à un produit scalaire (inégalité de Minkowski).
- Identité de polarisation sur un  $\mathbb{R}$ -e.v. :  $\langle x|y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ .
- Distance associée à une norme.
- Vecteurs orthogonaux. Orthogonal d'un s.e.v.. Famille orthogonale.  
**Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre**. Supplémentaire orthogonal.
- Espace euclidien. Bases orthonormées.  
**Tout espace euclidien admet une b.o.n.**  
**Expression de la norme, du produit scalaire et de la distance à l'aide d'une b.o.n.**
- Si  $f$  est une forme linéaire sur un e.v.e., alors il existe un unique vecteur  $a$  tel que :  $f(x) = \langle a|x \rangle$ ,  $\forall x \in E$  (*démonstration à connaître*)
- **Projecteurs orthogonaux**. Projeté orthogonal sur un s.e.v.  $F$  de dimension finie. Décomposition de tout vecteur  $x \in E$  sous la forme  $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$  dans la somme directe orthogonale  $F \oplus F^{\perp}$
- Projections orthogonales dans un espace de dimension finie. Si  $\dim E < +\infty$ , pour tout s.e.v.  $F$  de  $E$ , on a  $E = F \oplus F^{\perp}$ , et  $(F^{\perp})^{\perp} = F$ .
- Dans un e.v. (de dimension quelconque), **distance à un sous-espace  $F$  de dimension finie**.  
Identité  $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$   
Inégalité de Bessel.

## A venir :

Limite, continuité dans un espace vectoriel normé en dimension finie.

RQ : lorsqu'un étudiant se voit attribuer une note inférieure ou égale à 9/20, l'étudiant doit rendre sur papier pour le lendemain au professeur l'exercice posé par le colleur