PC

M. Roger

Programme de colles

quinzaine 5
semaine 9

du 23.11.09 au 27.11.09

Les points **en gras** sont à privilégier comme questions de cours.

Espaces préhilbertiens, espaces vectoriels euclidiens

- **Produit scalaire réels ou hermitien**
- **Norme**. Les normes $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ sont à connaître.
  Norme associée à un produit scalaire.
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Cas d'égalité.
  Inégalité triangulaire pour une norme associée à un produit scalaire (inégalité de Minkowski).
- Identité de polarisation sur un $\mathbb{R}$-e.v. : $< x|y >= \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$.
- Distance associée à une norme.
- Vecteurs orthogonaux. Orthogonal d'un s.e.v.. Famille orthogonale.
  Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Supplémentaire orthogonal.
- Espace euclidien. Bases orthonormées.
  Tout espace euclidien admet une b.o.n.
  Expression de la norme, du produit scalaire et de la distance à l'aide d'une b.o.n.
- Si f est une forme linéaire sur un e.v.e., alors il existe un unique vecteur a tel que : $f(x) =< a|x >$, $\forall x \in E$ *(démonstration à connaître)*
- **Projecteurs orthogonaux.** Projeté orthogonal sur un s.e.v. F de dimension finie. Décomposition de tout vecteur $x \in E$ sous la forme $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ dans la somme directe orthogonale $F \oplus F^\perp$
- Projections orthogonales dans un espace de dimension finie. Si $\dim E < +\infty$, pour tout s.e.v. F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$, et $(F^\perp)^\perp = F$.
- Dans un e.v. (de dimension quelconque), **distance à un sous-espace F de dimension finie.**
  Identité $||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + d(x,F)^2$
  Inégalité de Bessel.

A venir :

Séries de Fourier

RQ : lorsqu'un étudiant se voit attribuer une note inférieure ou égale à 9/20, l'étudiant doit rendre sur papier pour le lendemain au professeur l'exercice posé par le colleur