

La période des congés d'été est la meilleure pour combler d'éventuelles lacunes (y compris en géométrie), afin d'aborder l'année de spé PC dans les meilleures conditions. Les questions posées se veulent détaillées, et mettent en jeu une partie (non exhaustive) des savoirs et savoirs-faire requis. Le tout est à rédiger pour le jour de la rentrée. Vous pouvez au besoin me contacter par courrier électronique, à l'adresse : mroger@cpge-brizeux.fr.

Bonnes vacances et bon courage.

I Analyse

I.1 Suites arithmético-géométriques

1. (a) Soit $\alpha \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'un changement d'indice, montrer que $(1 - \alpha) \sum_{k=0}^n \alpha^k = 1 - \alpha^{n+1}$.
 (b) En déduire que $\sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$.
 (c) En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k$ converge vers $\frac{1}{1 - \alpha}$.
 (d) Pour $\alpha > 1$, quelle est la nature de la suite $(v_n) = \left(\sum_{k=0}^n \alpha^k\right)$?
 (e) Pour $\alpha = 1$, quelle est la nature de la suite $(w_n) = \left(\sum_{k=0}^n 1^k\right)$?
2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la monotonie de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* , obtenir un encadrement de $\frac{1}{x}$ pour $x \in [k, k+1]$. En déduire que $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$.
 (b) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En sommant pour k allant de 1 à $n-1$ les inégalités précédentes, montrer que $S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$.
 (c) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ diverge ("vers $+\infty$ "), lorsque $n \rightarrow +\infty$.

I.2 Tracé d'une fonction périodique continue, \mathcal{C}^1 par morceaux

Soit $f : [-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $I =]-\pi, \pi[$ et calculer sa dérivée en tout point de I .
2. Rappeler ce qu'est une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période $T > 0$ fixé.
3. Donner un exemple de telle fonction pour $T = 2$.
4. Soit x un réel. Donner un encadrement de $x - 2\pi E\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right)$, où E désigne la partie entière.
5. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f\left(x - 2\pi E\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right)\right)$. Justifier que h est continue en π et en $-\pi$, sur $] - \pi, \pi[$, et enfin que h admet 2π pour période.
N.B. une telle fonction sera dite continue 2π -périodique
6. Calculer $\lim_{x \rightarrow \pi^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x)$, et calculer $\lim_{x \rightarrow \pi^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x)$. En déduire que h' est continue sur $] - \pi, \pi[$ et sur $] \pi, 3\pi[$ mais ne peut pas être prolongée par continuité en π .
N.B. on dira alors que cette fonction h est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π -périodique
7. Tracer les graphes de h et k sur $[-3\pi, 3\pi[$.

I.3 Intégrale à paramètre

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$. Calculer $I(A) = \int_0^A e^{-\lambda t} dt$.
2. En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$.
(pour $\lambda > 0$, on dira que la fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et cette limite sera notée l'an prochain $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$)
3. Montrer que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

I.4 Développement limité, limite et prolongement

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{1+x}$.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln(1+x)$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(\ln(1+x))^2$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x^2)$.
5. En déduire l'existence d'une limite en 0 de $\frac{x^3}{[\ln(1+x)]^2 - \ln(1+x^2)}$ (on précisera sa valeur).
6. Conclure que l'on peut prolonger par continuité en 0 la fonction $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{(\ln(1+x))^2 - \ln(1+x^2)}$.

I.5 Une équation différentielle

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Trouver toutes les fonctions $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivables solutions l'équation différentielle

$$y'(t) = ay(t), \quad \forall t > 0 \tag{1}$$

2. Soit $e : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$. A l'aide de la méthode de "variation de la constante", trouver une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) - ay(t) = e^{at}, \quad \forall t > 0 \tag{2}$$

3. En déduire l'ensemble \mathcal{S}_e des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y' - ay = e \tag{3}$$

II Algèbre et géométrie euclidienne

II.1 Polynômes

1. Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
2. En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $P = (X+1)^3 - (-1)^3$.
3. Déterminer les racines (dans \mathbb{C}) de P et en déduire qu'il est simplement scindé.

II.2 Polynômes de Lagrange

1. Rappeler la base canonique \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soient $L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)}$, $L_1 = \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)}$, $L_2 = \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)}$, et $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$.
Justifier que pour tous i, j dans $\{0, 1, 2\}$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Vérifier que les polynômes P et $Q = \sum_{k=0}^2 P(a_k)L_k$ sont de degrés au plus 2 et coïncident en a_0, a_1, a_2 . Que peut-on en conclure ?
4. En déduire que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
N.B. ces polynômes seront appelés d'interpolation de Lagrange aux points (a_0, a_1, a_2) en spé

II.3 Ellipse paramétrée en polaires, en cartésiennes

Soient a, b deux réels vérifiant $0 < b < a$.

En cartésiennes

1. Reconnaître l'ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ paramétré par les équations $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$.
2. Donner une équation cartésienne de cet ensemble. Soit $x \in [-a, a]$. On considère les points (non nécessairement distincts) $M_1(x, b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2})$ et $M_2(x, -b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2})$. Calculer $M_1 M_2 = I(x)$.
3. Montrer que $A = \int_{-a}^a I(x) = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$.
4. Justifier que la fonction sin réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$. En faisant le changement de variable $t = \sin u$, montrer que $A = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos(u)^2 du$.
5. En linéarisant $\cos^2(u)$, montrer que $A = \pi ab$.
6. Interpréter le résultat à la lumière du théorème de Fubini sur le domaine $\left\{ (x; y), -a \leq x \leq a, -b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2} \leq y \leq b\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2} \right\}$.

En polaires

1. Rappeler les expressions en fonction de a et b de la demi-distance focale c , du paramètre p et de l'excentricité e .
2. Reconnaître l'ensemble \mathcal{E}' paramétré en polaires par $\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$
3. Calculer $A' = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho(\theta)^2 d\theta$. Interpréter ce résultat.
4. Tracer \mathcal{E} et \mathcal{E}' dans un même repère pour $a = 4$ et $b = 2$.
5. Calculer l'intégrale curviligne $\frac{1}{2} \oint_{\mathcal{E}^+} x dy - y dx$.
6. Que donne la formule de Green-Riemann pour calculer $\iint_{\mathcal{E}} dx dy$?
(utiliser la fonction définie sur \mathcal{E} par $(x, y) \mapsto 1$)

II.4 Un système à paramètre

Soit $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre le système $AX = X$.
En déduire que $\text{Ker}(f - id) = \{v; f(v) = v\}$ est la droite (vectorielle) dirigée par $\vec{u}_1(-1; -1; 1)$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre le système $AX = -X$.
En déduire que $\text{Ker}(f + id) = \{v; f(v) = -v\}$ est la droite (vectorielle) dirigée par $\vec{u}_2(-1; 1; 0)$.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre le système $AX = 2X$.
En déduire que $\text{Ker}(f - id) = \{v; f(v) = 2v\}$ est la droite (vectorielle) dirigée par $\vec{u}_3(1; 1; 2)$.
4. Après avoir justifié que la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre, donner la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B} à \mathcal{B}' , puis donner la matrice D de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.