Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. I : Intégrales généralisées

— rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann : $\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a+\frac{k}{N}(b-a)\right)}$

théorème fondamental du calcul intégral : Si $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$, alors pour tout $(a,x) \in I^2$, $\boxed{f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$

— Nature d'une intégrale généralisée sur un intervalle réel I (borné ou non) : **convergence** ou **divergence**, dans le cas continu.

— Nature des intégrales de fonctions usuelles :

$\boxed{\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1}$, $\boxed{\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, $\boxed{\int_{[0,+\infty[} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta > 0}$, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**

— **Critère (C.N.S.) de convergence pour une fonction positive** sur $[a,+\infty[$ (et continue ou continue par morceaux) :

$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$. **[preuve ⋆]** dans le cas continu.

Théorème de comparaison pour des intégrales généralisées convergentes de fonctions continues positives.

[preuve ⋆] dans le cas de deux fonctions continues positives f, g avec $0 \leq f \leq g$.

— Fonctions continues par morceaux, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.

— **Fonctions** (continues ou c.p.m.) **intégrables** à valeurs réelles ou complexes, sur un intervalle réel.

Proriété : Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale généralisée $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ converge, **[preuve ⋆]** dans le cas à valeurs réelles.

Notations : $\boxed{\int_I f}$ pour une fonction intégrable, espace vectoriel $\boxed{\mathcal{CML}^1(I,\mathbb{K})}$, espace vectoriel $\boxed{\mathcal{C}^0L^1(I,\mathbb{K})}$.

— **Théorème de comparaison**, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.

— Propriétés de l'intégrale généralisée : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles.

Changement de variable :

pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge

et si tel est le cas : $\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u)f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u}$

— Définition de la notion de produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-e.v. . Espace $\mathcal{CML}^2(I,\mathbb{K})$, **produit scalaire usuel** $< | >$ sur $\mathcal{C}^0L^2(I,\mathbb{R})$

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\boxed{\forall f,g \in \mathcal{CML}^2(I,\mathbb{R}), \text{ on a } \int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g(t)^2\ \mathrm{d}t}}$

Méthode de cours : pour étudier la nature d'une intégrale généralisée, on étudie la continuité, on repère les bornes impropres, puis on étudie la convergence (par passage à la limite avec une expression primitive, ou comparaison via équivalent ou O en une borne impropre quelconque, voire par prolongement par continuité en une borne finie ouverte si la fonction admet un tel prolongement ; en cas de multiples bornes impropres, on peut étudier séparément chaque borne impropre à l'aide de la relation de Chasles.