Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Révisions de PCSI

Le programme de PCSI a été revu pendant les vacances. Les étudiants peuvent être interrogés sur des exercices classiques notamment :

— Algèbre linéaire : vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ; Factorisation des polynômes.

— Analyse : calculs usuels de dérivées, de primitives ; limites d'une suite réelle, d'une fonction réelle ou complexe de la variable réelle.

Ch. I : E.V.N., limites, continuité

I) Rappels de PCSI

1) Espace vectoriels.
Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.

2) Produits scalaires sur un espace vectoriel réel.
Compétence : Savoir justifier qu'une application est un produit scalaire, qu'une famille de vecteurs est orthogonale

3) Normes.
Compétence : Savoir justifier qu'une application est une norme

4) Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.

5) Bases orthonormées d'un espace vectoriel réel.
Compétence : connaître les formules reliant le produit scalaire et la norme associée aux composantes dans une base orthonormée

6) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.
Compétence : connaître la formule du théorème de projection orthogonale, et une interprétation graphique en dimension 2 ou 3

II) Normes en dimension finie

1) Normes 1, 2, ∞ sur $\mathbb{R}^n$.

2) Comparaison de normes en dimension finie.

III) Boules

1) Boules fermées, boules ouvertes dans un espace vectoriel normé.
Compétence : Savoir dessiner dans le plan des boules ouvertes ou fermées pour une norme explicite

2) Partie bornée.

IV) Limites, continuité.

1) Limite d'une suite.
Compétence : Savoir quantifier avec ε la notion de limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n. ;
En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

2) Continuité d'une fonction de la variable vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel
Compétence : Savoir quantifier avec ε la notion de continuité d'une application entre espaces vectoriels normés.

3) Application lipschitzienne.
Toute application lipschitzienne est continue. **[preuve]**

Ch. II : Intégrales généralisées

— rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann : $\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a+\frac{k}{N}(b-a)\right)}$

— théorème fondamental du calcul intégral : Si $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$, alors pour tout $(a,x) \in I^2$, $\boxed{f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$

— Fonctions continues par morceaux, généralisation à ces fonctions de la notion d'intégrale sur un segment.

— **Convergence** ou divergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle réel I (borné ou non).

— Nature des intégrales de fonctions usuelles :

$\boxed{\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1}$, $\boxed{\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, $\boxed{\int_{[0,+\infty[} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta > 0}$, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**