Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. I : E.V.N., limites, continuité

I) IV Limites, continuité.
- Continuité d'une fonction de la variable vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel *Compétence : Savoir quantifier avec ε la notion de continuité d'une application entre espaces vectoriels normés.*
- Application lipschitzienne.
  Toute application lipschitzienne est continue. **[preuve]**

Ch. II : Intégrales généralisées

- rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann :
  $$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a+\frac{k}{N}(b-a)\right)}$$
- théorème fondamental du calcul intégral : Si $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$, alors pour tout $(a,x) \in I^2$, $\boxed{f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$
- Fonctions continues par morceaux, généralisation à ces fonctions de la notion d'intégrale sur un segment.
- **Convergence** ou divergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle réel I (borné ou non).
- **Nature des intégrales de fonctions usuelles :**
  $\boxed{\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1}$, $\boxed{\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, $\boxed{\int_{[0,+\infty[} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta > 0}$, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**
- **Critère de convergence pour une fonction positive** continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ (et continue par morceaux) :
  $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$.
- **Fonctions (continues ou c.p.m.) intégrables** à valeurs réelles ou complexes, sur un intervalle réel.
- **Théorème de comparaison**, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.
- Propriétés de l'intégrale généralisée : positivité, linéarité, croissance, relation de Chasles.
  Changement de variable : pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge et si tel est le cas : $\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u)f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u}$
- Espaces $\mathcal{CML}^1(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{CML}^2(I,\mathbb{K})$. **Produit scalaire usuel** $< \mid >$: $(f,g) \longmapsto \int_I fg$ sur $\mathcal{C}^0L^2(I,\mathbb{R})$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall f,g \in \mathcal{CML}^2(I,\mathbb{R})$, on a $\int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g(t)^2\ \mathrm{d}t}$