Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.

• Vous passez ensuite aux exercices.

# Ch. II : Intégrales généralisées

— **Critère de convergence pour une fonction positive** continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ (et continue par morceaux) : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$.

— **Fonctions (continues ou c.p.m.) intégrables** à valeurs réelles ou complexes, sur un intervalle réel.

— **Théorème de comparaison**, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.

— Propriétés de l'intégrale généralisée : positivité, linéarité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable : pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge et si tel est le cas : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u}$

— Espaces $\mathcal{CML}^1(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{CML}^2(I, \mathbb{K})$. **Produit scalaire usuel** $< \mid >: (f, g) \longmapsto \displaystyle\int_I fg$ sur $\mathcal{C}^0L^2(I, \mathbb{R})$

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall f, g \in \mathcal{CML}^2(I, \mathbb{R})$, on a $\displaystyle\int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_I g(t)^2\ \mathrm{d}t}$

# chap. III : Espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces stables

— rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Somme directe $A \oplus B$ de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

— Somme $\displaystyle\sum_{i=1}^s E_i$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1, \dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$. Somme directe $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^p E_i$ de plusieurs s.-e.v..

— Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel. Base adaptée à une somme directe.

Relation $\dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^s E_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^s \dim(E_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

— Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par $u$ **[preuves]**

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par $v$ **[preuves]**

— Endomorphisme induit $u_{|F}^{|F}$ sur un sous-espace vectoriel $F$ stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.

Ecriture matricielle dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ lorsque $F$ est stable par $u$. Calculs matriciel par blocs.

— Calculs de déterminants : rappels de PCSI : développements par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'un produit de matrices. Déterminants triangulaire par blocs. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes.

— Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même déterminant. Déterminant d'un endomorphisme.

— Déterminant de Vandermonde.