Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. III : Espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces stables

— **Trace** d'une matrice, d'un endomorphisme. Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée ; N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases ; Matrice produit et coefficients.

— **Deux matrices semblables ont même trace**. **[preuve]**

— Espaces vectoriels produits.

chap. IV : Séries numériques

- *Rappels de PCSI :*

— Série numérique, sommes partielles. **CNS de convergence pour une série à termes positifs.**

Séries géométriques $\sum_{n\geq 0}\gamma^n$, nature et valeur de la somme. **[preuve]**

Séries de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, nature.

Séries absolument convergentes.

— **Théorèmes de comparaison** (entre séries positives ;d'une série réelle à une série positive) :

encadrement $|u_n| \leq v_n$, équivalent à un terme strictement positif.

- *Compléments de PC sur les séries numériques :*

— Théorème de **Comparaison série-intégrale**.

Les étudiants doivent savoir encadrer $\sum_{k=1} f(k)$ à l'aide de deux intégrales. **[preuve]**

— **Règle de d'Alembert** pour une série à termes TOUS non nuls.

— **Série exponentielle** d'un complexe z : $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est ACV, sa somme est notée $\exp(z)$.

Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la suite des sommes partielles : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp(x)$.

— Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées** et **majoration du reste** $|R_N| \leq |u_{N+1}|$.

— **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ (démonstration non exigible)

— Produit de Cauchy (démonstration non exigible) :

si $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont ACV, alors la série $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{n-p}\right)$ est ACV et sa somme est égale aux produit $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \times \sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$.

- *Exemples à connaître :*

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n\geq 1$ par $s_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite γ.

$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument divergente.

$\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.