Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIII : Couples et suites de variables aléatoires

3) Corrélation, covariance.

— Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
Coefficient de corrélation $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.
interprétation de $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ch. XIV : Fonctions de 2 (ou 3) variables. Surfaces.

— **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
Fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.
fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

— La **classe $\mathcal{C}^1$**.

— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in \mathcal{U}$:
$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(h)}$$

— Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{Grad}\, f(M)$.

— Application **différentielle** $\mathrm{d}f_A : (h_1,h_2) \longmapsto h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

— On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en A appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}$ si :
$$\boxed{\exists \varepsilon > 0;\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|\overrightarrow{AX}\| \le \varepsilon \Rightarrow f(X) \ge f(A)}$$
Extremums locaux, Extremums globaux.
Condition nécessaire d'extremum : annulation du gradient.

Toute f continue sur un fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles y est **bornée et atteint ses bornes** (ADMIS).

— **règle de la chaîne** : dérivation de $t \mapsto f(x(t),y(t))$.

interprétation : **la tangente en M à une courbe plane d'équation cartésienne** $f(x,y) = 0$ est la droite passant par M et orthogonale à $\overrightarrow{Grad}\, f(M)$.
interprétation pour les **lignes de niveau planes** $\mathcal{L}_K = \{(x,y); f(x,y) = K\}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$: Le vecteur gradient est orthogonal aux (tangentes des) lignes de niveau.

— **Dérivation de fonctions composées** de la forme $(u,v) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$.
Cas des coordonnées polaires, cas des changements de variables affines.

— Point régulier d'une surface donnée par une équation cartésienne $g(x,y,z) = 0$.
Le plan tangent en M est le plan contenant le point M et orthogonal à $\overrightarrow{Grad}\, g_M$ pour une surface donnée par une équation cartésienne $g(x,y,z) = 0$.
Gradient et plan tangent à une surface donnée par une équation cartésienne $g(x,y,z) = 0$.

— Cas d'une équation cartésienne $z = f(x,y)$; interprétation géométrique : plan tangent en $M = (A, f(A))$ point d'une surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $z = f(x,y)$.

— **Equations aux dérivées partielles** du premier ordre.
Exemple à connaître :
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)}$ a pour solutions les fonctions de la forme $f : (x,y) \longmapsto K(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s,y)\ \mathrm{d}s$

à venir : Classe $\mathcal{C}^2$, Schwarz, EDP d'ordre 2